

ALGUNOS ASPECTOS DE LA PREHISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Si bien la Historia comienza con la escritura, existen numerosas conjeturas acerca del quehacer humano en la Prehistoria. Se exponen algunas de ellas relacionadas con conceptos matemáticos, basadas en los registros disponibles más antiguos.

Claudio Padra

Entre las primeras actividades del hombre prehistórico se pueden nombrar la conservación del fuego, la creación de trampas para cazar animales, la construcción de casas y tumbas. También el cálculo de distancias con su cuerpo y sus pasos, el grabado de escenas en sus cavernas, la observación del movimiento de los astros y las direcciones espaciales. En esas actividades están prefigurados los conceptos básicos de la matemática: número, medida, orden. Por ejemplo, el trueque, que fue la base del comercio durante un largo período, es una actividad que se basa en la idea de correspondencia o función, uno de los conceptos más básicos de la matemática. Al pasar de la etapa paleolítica a la neolítica los procesos se afinan: las nuevas técnicas agrícolas y pastoriles, la cerámica y la carpintería, la industria textil, la minería y la metalurgia, el trueque de bienes u objetos, la navegación y el transporte, las normas que rigen la naciente organización familiar, social y económica exigen una precisión cada vez mayor en el contar, en el medir, y en el ordenar. Para lograr dicha precisión era necesario desarrollar la aritmética. Entre las conjeturas sobre la aparición del número se encuentran las que afirman que apareció en base a la necesidad de establecer una jerarquía entre los integrantes de la tribu en los rituales religiosos o en otras actividades comunitarias (es decir, los números como ordinales). Otras teorías afirman que el número apareció ante la necesidad de establecer la relación entre las fuerzas propias y la de los vecinos (los números como cardinales). La palabra cálculo deriva de la palabra calculus del latín, que significa "contar con piedras" (por esto mismo, se llaman cálculos a las piedras de los riñones). Lo más natural para el hombre primitivo fue poner en

correspondencia cada unidad de lo que quería contar con una piedra. Hay muchas variaciones de esta manera de operar: los ábacos, los cuenta ganados (cuerdas con nudos), el rosario, etc. Estos accesorios del cálculo permiten realizar operaciones sin tener que poner mucha atención en ellas, ya que el cálculo, en algunas ocasiones, no es el principal objetivo del individuo.

Sin lugar a dudas el avance más importante de la humanidad fue la aparición de la escritura, y los primeros documentos tenían que ver con cuestiones matemáticas, de donde se deduce que el conocimiento matemático debía ser previo a la escritura. Los sacerdotes tenían que llevar bien las cuentas de las ofrendas para obtener el beneficio de los dioses, dando así impulso a la aritmética elemental; mientras que los constructores debían realizar importantes avances en el desarrollo de la geometría para satisfacer los pedidos de monumentos y tumbas de sus reyes. Para el registro de estos números los egipcios tallaron piedras, y los babilonios tablas de arcilla. Para ambos procesos se necesitaban personas con las habilidades necesarias para el proceso de escritura, y debido a su complejidad estas formas de escritura no fueron las utilizadas por la gente común. Antes de que existiera el papel y de que éste fuera económico, el método que estaba al alcance de toda la gente era tallar madera. Sólo se necesitaba un palo y algo afilado para realizar marcas sobre el mismo. Uno de los métodos más básicos de registro en casi todo el mundo fue el de maderas marcadas con cuentas y partidas en dos. En general eran notas de promesa (equivalente a nuestro actual pagaré) o billetes de intercambio. Esta doble madera tallada fue usada por el Banco de Inglaterra: en las transacciones de préstamo o depósito, la cantidad era grabada en la madera, y luego cortada en dos, una de las mitades quedaba en el Banco y la otra era entregada a la otra persona como recibo. Cuando el tenedor regresaba, las maderas eran "chequeadas", si ellas coincidían se pagaba la cantidad acordada. También fueron utilizados desde la prehistoria bastones de madera como recurso nemotécnico, que transmitían información numérica mediante muescas o dibujos que decoraban su superficie. Estos bastones fueron usados por el ministerio británico de Hacienda desde el año

Palabras claves: Historia de la Matemática, Prehistoria, ábaco, quipu.

Claudio Padra
Matemático, Profesor de la Universidad Nacional del Comahue
Investigador de CNEA y del Conicet
e-mail: padra@cab.cnea.gov.ar

1.100 hasta 1.826 para registrar sus ingresos.

A continuación se verán algunas consideraciones acerca del origen del cálculo y de la geometría.

Origen del cálculo

El hecho de que la gramática de ciertas lenguas conservó una distinción entre uno, dos y más de dos sugiere que el proceso del desarrollo del número fue largo y lento. A modo de ejemplo, la lengua portuguesa tiene femenino y masculino para uno y dos, y el castellano utiliza un gran número de palabras para indicar "dos": par, pareja, yunta, dupla, dúo, etc. La tendencia natural del lenguaje a desarrollarse de lo concreto a lo abstracto se ve en muchas medidas de longitud actuales de origen antiguo: *pie*, *codo*, *pulgada*, *vara*, que han derivado en muchos casos de partes del cuerpo humano. Es natural que el hombre para contar haya acudido a lo que tenía más cerca: su propio cuerpo; en especial los dedos de las manos, y eventualmente, de los pies. Aún hoy hablamos de dígitos (del latín *digitus*, dedo) para referirnos a las cifras del 1 al 9. Ese *cálculo digital* se extendió hasta convertirse en un *cálculo corporal* utilizando, además de manos y pies, otras partes del cuerpo. Una vez utilizados los dedos de la mano y de los pies para representar los números, se continuaba con la muñeca, el codo, la axila, el hombro, etc., y sólo bastaba recordar el sitio del cuerpo al que se había llegado en una cuenta para poder reproducirla. Estas mismas repeticiones, al dar siempre el mismo resultado, serían útiles para futuros cálculos; y al coincidir el último término de un conjunto ordenado con la totalidad de sus elementos

componentes, el número ordinal se identificó con el número cardinal hasta que los progresos de la matemática obligaron a separarlos.

Una vez agotadas las partes del cuerpo, el hombre recurrió a los objetos que le provee la naturaleza: hojas secas y piedras. Esto permitió realizar cálculos con números más grandes, pero con el inconveniente de que contar con piedras constituye un mecanismo demasiado efímero para conservar la información, y en vista de ello, el hombre prehistórico a veces registró un número haciendo incisiones en palos o en trozos de huesos. Del año 300.000 al 200.000 a.C. el hombre moderno se hizo fisiológicamente capaz de hablar. Sin embargo, las palabras para expresar ideas numéricas aparecieron muy lentamente; y es muy probable que los signos para representar los números hayan precedido a las palabras para representarlos, simplemente porque es mucho más fácil cortar muescas en un palo que establecer una frase bien modulada para identificar un número concreto.

En la caverna de Blombos (Sudáfrica) se hallaron varias piezas de arte paleolítico de 70.000 años atrás. Entre ellas aparecen dos decoradas con patrones geométricos (se pueden observar en <http://www.nsf.gov/od/lpa/news/02/pr0202images.htm>). Hacia el año 30.000 a.C. aparecen en Europa las primeras pinturas rupestres. De esa época data el primer documento matemático del hombre: en Checoslovaquia se descubrió un hueso de lobo con 55 incisiones bastantes profundas distribuidas en dos series, la primera con 25 y la segunda con 30 y en cada serie, las muescas están distribuidas en grupos

Fig. 1: Esquema del hueso Ishango.

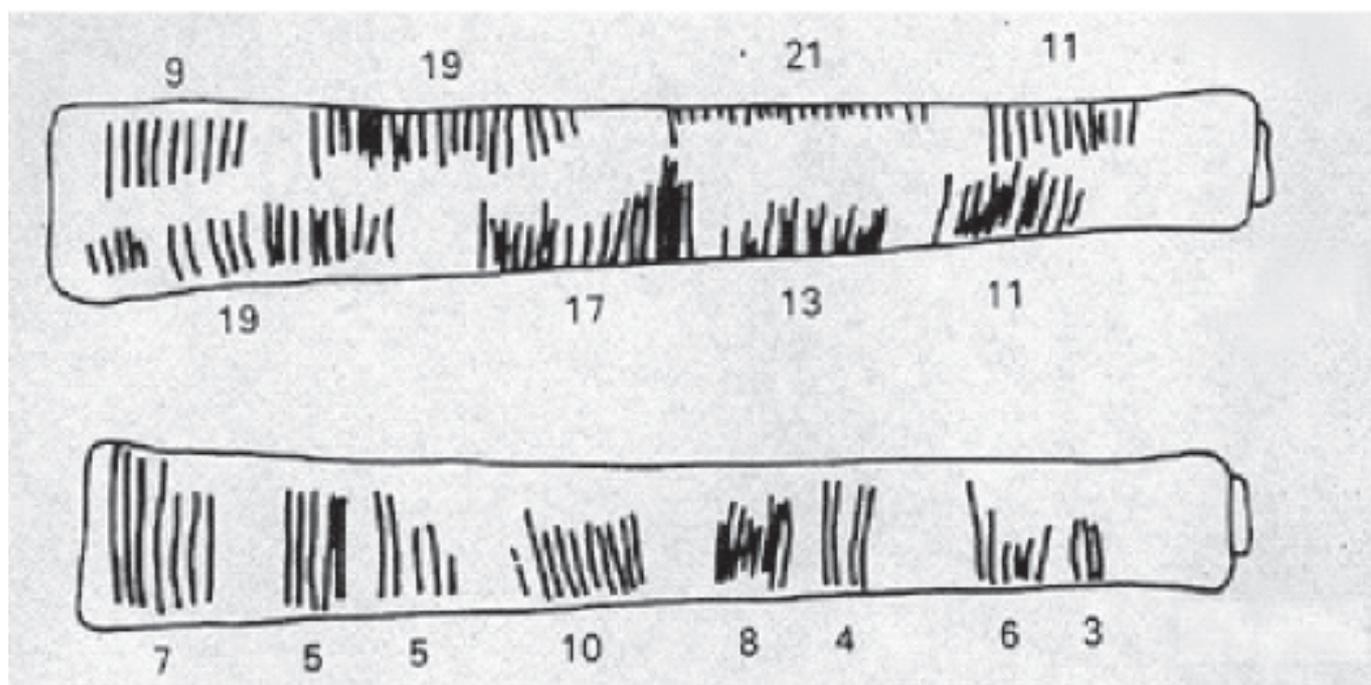


Fig. 2: Fotografía de la tablilla Salamis.

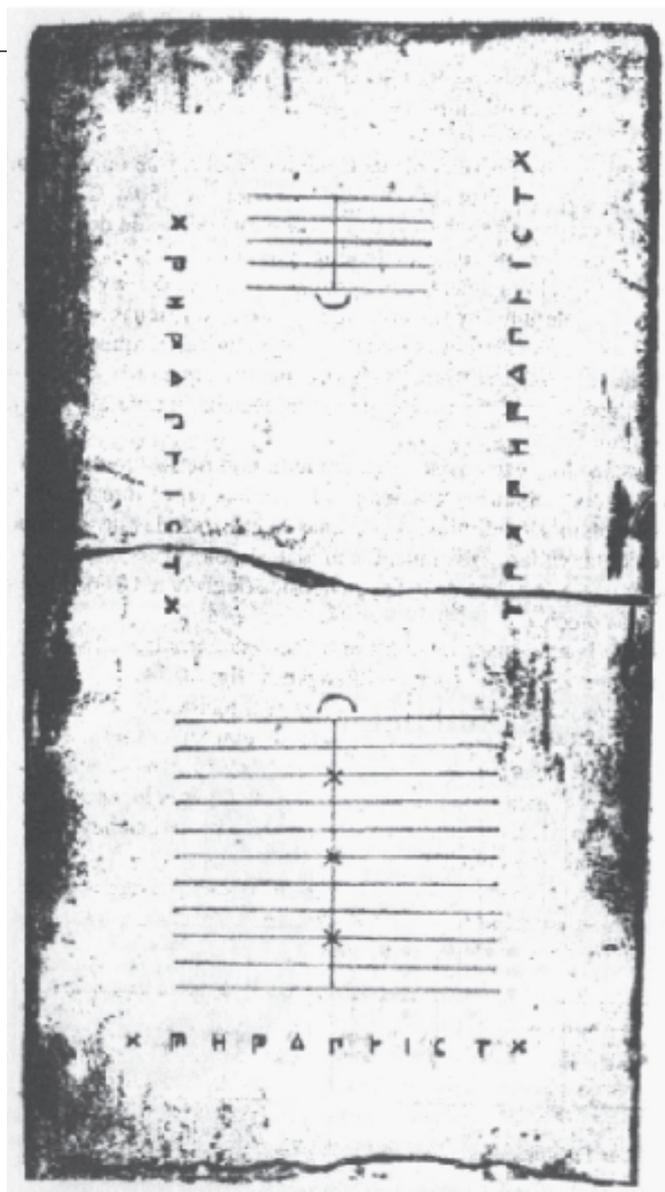
de 5, muy probablemente por el número de dedos de una mano. Desde el punto de vista matemático resulta inconveniente que el hombre de Cromagnon y sus descendientes hubieran tenido cuatro o seis dedos en cada mano en lugar de cinco. Otro registro interesante se encuentra en el Museo de Historia Natural en Bruselas: el hueso Ishango que puede observarse en <http://www.naturalsciences.be/expo/ishango/en/index.html>. Tiene 3 filas de incisiones, y una de las columnas tiene 11, 13, 17 y 19 incisiones. El hueso Ishango data de aproximadamente 6.500 años, y se conjetura que podría ser el registro más antiguo de números primos.

Origen de la geometría

Los dibujos y diseños del hombre neolítico revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental. El desarrollo de la geometría puede haberse visto estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura, como por un sentimiento estético de diseño y orden. Los resultados geométricos más antiguos descubiertos en la India constituyen lo que se llamó los *Sulvasutras* o "reglas de la cuerda", que son relaciones muy sencillas que al parecer se utilizaban en la construcción de altares y templos.

No se sabe si fue la necesidad de contar con silos primitivos para acumular alimentos para independizarse un poco de la naturaleza, o la de construir templos para adorar dioses, o alguna otra razón la que empujó al hombre a realizar construcciones; pero para que esas construcciones se concretasen previamente se debían desarrollar una trigonometría elemental y obtener teoremas geométricos como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras.

Entre los constructores del antiguo Egipto había una especialidad: la de los anudadores. Los anudadores hacían trece nudos equiespaciados sobre una cuerda, y unían el primero con el último de manera de obtener un triángulo con lados de 3, 4 y 5 unidades, y sabían que el ángulo comprendido entre los dos lados menores es recto. Nuestros actuales albañiles, para marcar



un ángulo recto utilizan una cuerda en la que tienen marcadas tres medidas: 60 cm., 80 cm. y 100 cm.; y si dibujan un triángulo con los lados de esas medidas, el ángulo comprendido entre los dos lados menores también es recto. Como puede observarse, en ambos casos se utiliza el mismo principio, conocido actualmente como el teorema de Pitágoras. Es probable que este método para obtener ángulos rectos (u otro similar), se conociera antes de la aparición de la escritura. Esas ternas de números que producen triángulos rectángulos son conocidas como ternas pitagóricas (que, dicho sea de paso, eran conocidas mucho antes de que existiera Pitágoras). Es fácil ver que multiplicando los tres números de una terna pitagórica, los resultados vuelven a formar otra terna pitagórica. Por ejemplo, si multiplicamos por 20 la terna que utilizaban los egipcios (3, 4, 5) se obtiene la terna que utilizan los actuales albañiles (60, 80, 100). Si la terna no tiene factores en común se llama terna primitiva. Aproximadamente 1.900 años antes de Cristo los babilonios confeccionaron una tablilla, ahora llamada Plimpton

322 y que se encuentra en la Universidad de Columbia, la cual contiene una lista de ternas pitagóricas primitivas. Esto muestra la importancia que le dieron a estas ternas las primeras civilizaciones que adquirieron la escritura, y nos hace suponer que ya eran importantes antes de la aparición de los documentos escritos.

Dispositivos de cálculo y registros de información en la matemática primitiva

A medida en que la sociedad del hombre prehistórico evoluciona aparecen dos nuevas necesidades: la de realizar cálculos de manera más rápida y eficiente, y la de registrarlos. Para ello, el ingenio humano pro-

dujo diferentes dispositivos. En esta sección veremos dos: el ábaco, que fue utilizado por distintos pueblos del mundo antiguo, y el quipu de los Incas. El ábaco era una rudimentaria máquina de calcular cuya existencia se remonta a los tiempos prehistóricos. El quipu del imperio Inca era un dispositivo formado por cuerdas con nudos, que permitía registrar cualquier dato que el Estado requiriera. El imperio Inca fue la única sociedad de toda la historia que alcanzó un alto grado de civilización sin conocer la escritura.

A continuación se presenta una breve descripción de la utilización de ambos accesorios.

Fig. 3: El ábaco en las distintas Edades del hombre.

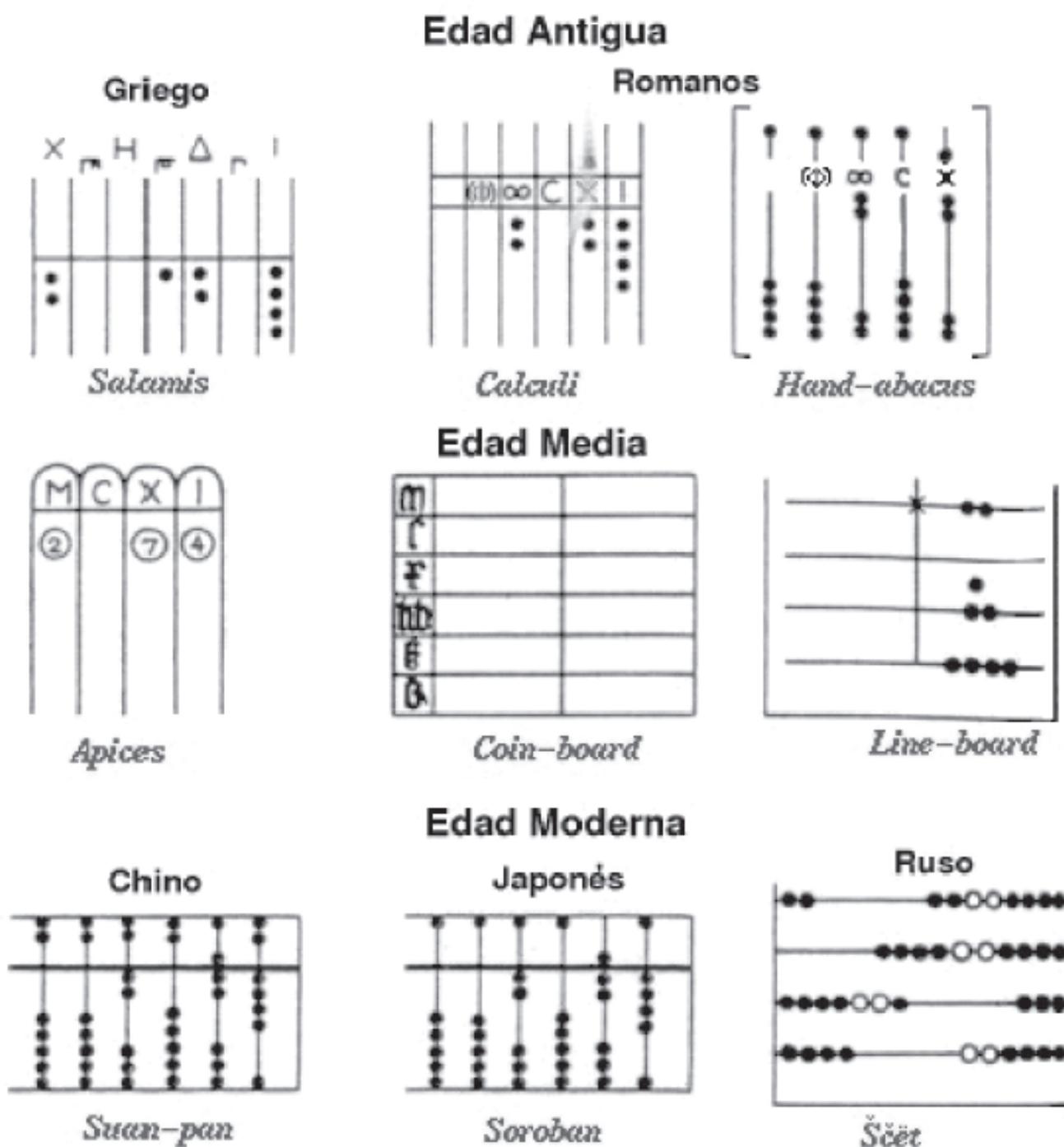
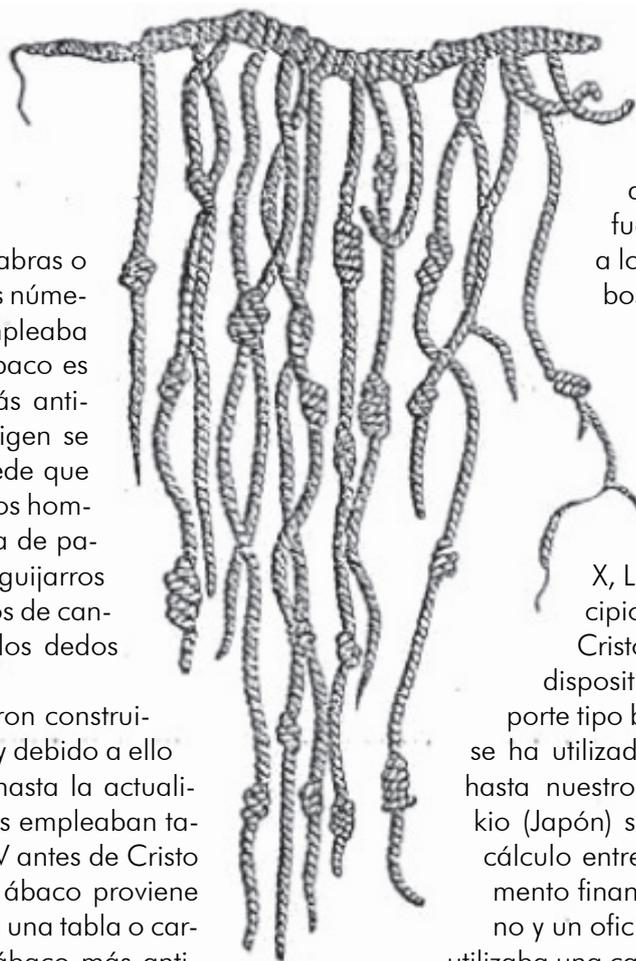


Figura 4: Esquema de un quipu.



El ábaco

Antes de disponer de palabras o símbolos para representar los números, el hombre primitivo empleaba los dedos para contar. El ábaco es el dispositivo de cálculo más antiguo que se conoce y su origen se pierde en la prehistoria. Puede que haya sido desarrollado por los hombres primitivos bajo la forma de palos con muescas y pilas de guijarros o piedras para dejar vestigios de cantidades tan grandes como los dedos de las manos y de los pies.

Los primeros ábacos fueron contruidos en material perecedero y debido a ello ninguno se ha preservado hasta la actualidad. Se sabe que los griegos empleaban tablas para contar en el siglo V antes de Cristo o tal vez antes. La palabra ábaco proviene del griego abax que significa una tabla o carpeta cubierta de polvo. El ábaco más antiguo es el hallado por el arqueólogo griego Rhangabés y está realizado sobre una placa de mármol blanco en la cual se hallan excavadas divisiones limitadas por trazos paralelos y equidistantes. Este ábaco originario del siglo V antes de Cristo se conserva en el Museo Epigráfico de Atenas, y está constituido por una gran plancha de mármol blanco de 149 cm. de largo por 75 cm. de ancho y 4,5 cm. de espesor; llamada tablilla Salamis por haber sido encontrada en la isla de Salamis en 1846, y que podemos observar en la fotografía del Museo Nacional de Epigrafía, Atenas, reproducida en la figura 2.

El ábaco tal como lo conocemos actualmente está constituido por una serie de hilos con cuentas enhebradas en ellos. En nuestro país puede encontrarse este tipo de ábaco en las salas de billar, y más elementales, en las cabeceras de los mete-goles. El antepasado del ábaco consistía en unas piedras introducidas en unos surcos que se practicaban en la arena. Esas piedras móviles llevaron al desarrollo del ábaco, que ya se conocía en el año 500 a.C. en Egipto, según lo menciona el historiador griego Herodoto (aprox. 484-425

a.C.) y es probable que también fuera usado en Babilonia, gracias a los contactos comerciales de ambos pueblos.

El ábaco romano era de madera y las piedras se movían dentro de unas ranuras talladas en una tabla, y cada una de ellas tenía grabado en la parte superior uno de los numerales romanos I, V, X, L, C ó M. Posteriormente, a principio del segundo siglo después de Cristo, los chinos perfeccionaron este dispositivo, al cual le agregaron un soporte tipo bandeja. Esta versión de ábaco se ha utilizado en Oriente Medio y en Asia hasta nuestros días. A finales de 1946 en Tokio (Japón) se celebró una competencia de cálculo entre un mecanógrafo del departamento financiero del ejército norteamericano y un oficial contable japonés. El primero utilizaba una calculadora eléctrica y el segundo un ábaco. La competencia consistía en realizar operaciones matemáticas de suma, resta, multiplicación y división con números de entre 3 y 12 cifras. Salvo en la multiplicación (ya que en el ábaco los resultados intermedios no pueden registrarse) el ábaco triunfó en todas las pruebas incluyendo una final de procesos compuestos. En la figura 3 pueden observarse distintos esquemas de ábacos utilizados por el hombre en distintas regiones y épocas.

El quipu del imperio Inca

Los Incas pudieron controlar un próspero imperio que llegó a extenderse por unos 800.000 km. cuadrados, a pesar de no conocer ni la rueda ni la tracción animal. Fue además la única sociedad de toda la historia que alcanzó un alto grado de civilización sin conocer la escritura. El éxito de los Incas residió en su habilidad para llevar registros meticulosos por medio de un instrumento basado en el uso de un complicado sistema de cuerdas anudadas. Este instrumento se llamó quipu (palabra quechua que significa «nudo») y consistía en una cuerda principal de la cual colgaban

varios haces de cuerdas secundarias. Cada haz llevaba la cuenta de un asunto distinto. Las cuerdas colgantes eran anudadas a determinados intervalos mediante nudos de diferentes tipos, cada uno de los cuales representaba un número diferente. Los quipus permitían al Inca llevar censos actualizados, organizar la población en unidades administrativas de al menos 10 familias cada una e incluso evaluar los impuestos que eran distribuidos en forma de trabajo. Cada ciudad, población o distrito del Imperio Inca contaba con funcionarios reales que con el título de quipucamayocs, o «guardianes de nudos» que tenían por tarea, por un lado, confeccionar los quipus e interpretar su significado en cualquier instante, y por otro lado, proveer al gobierno de los informes relativos a determinado asunto de importancia. Ellos procedían a inventariar anualmente los distintos productos recolectados en la región, y llevaban un censo de los distintos nacimientos en la población, consignando los datos sobre cordones o nudos con una regularidad y precisión asombrosa, los que luego transmitían a los registros de la capital (Cuzco).

Los nudos representaban los valores en un sistema decimal, y la ausencia de nudo significaba cero. Pero los valores cambiaban según el tipo de nudo usado. A su vez, las cuerdas se ataban en haces por medio de las llamadas *cuerdas de adición*, extendidas hacia arriba en la foto del quipu. Los nudos de las cuerdas de adición indicaban el valor de cada haz de cuerdas colgantes. En la figura 4 puede verse un esquema de un quipu del imperio Inca.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del quipu: «Supongamos que un funcionario quiera expresar que antes de Manco-Capac, primer Inca, no había ni rey, ni jefe, ni culto, ni religión; que al cuarto año de su reinado, este emperador sometió diez provincias, cuya conquista le costó cierto número de hombres; que se apoderó en una de ellas de mil unidades de oro y de tres mil unidades de plata y que, en agradecimiento por la victoria, hizo celebrar una fiesta en honor del dios Sol. El quipu tomará un color negro, color que indica el tiempo; colgará de él un gran número de hilos incoloros y hará una cantidad de nudos pequeños; luego, llegado a la parte media del cordón, hará un grueso nudo atravesado por un nudo carmesí, color del Inca. El lector, viendo el quipu dividido en dos mitades, de las cuales la primera lleva hilos incoloros, y una maza de nudos, dirá: el pueblo antes del primer soberano (hilo carmesí), durante un tiempo muy largo (gran número de hilos y nudos), no tenía monarca, ya que ninguno de los hilos es carmesí; ningún jefe, ya que ninguno es violeta oscuro; ninguna religión ya que ninguno es azul; ninguna división administrativa ya que ninguno es de colores variados. Sobre el hilo carmesí el quipu hará cuatro pequeños nudos, para explicar que los acontecimientos relatados suceden en el cuar-

to año del reinado, y fijará en el nudo central un hilo gris, sobre el cual se escalonarán diez pequeños nudos, indicando las diez provincias conquistadas. A cada uno de estos atará un hilo verde, que llevará, siempre por medio de nudos, la cifra de los adversarios muertos, y añadirá cordeles de diferentes colores para indicar sus provincias natales, porque cada provincia se expresaba por una mezcla de matices diferentes. De la misma manera, atará un hilo rojo, color que designaba al ejército imperial, haciendo conocer el número de guerreros muertos y la provincia de la que eran originarios. En cuanto al botín, el quipu suspenderá en el nudo correspondiente a la provincia de que se trata un hilo amarillo, color del oro, con un nudo que indica un millar, y un hilo blanco, color de la plata, con tres de esos nudos. Añadirá un cordón azul, blanco y amarillo para designar al dios que vive en el cielo (azul) y que crea la plata (blanco) y el oro (amarillo), y para hacer comprender que se ha dado una fiesta en su honor» (cita de *Crónica Moralizada del Orden de San Agustín en el Perú con Sucesos Ejemplares Vistos en esta Monarquía*, escrito por Antonio de la Calancha en 1638 y reproducido en el libro del Ing. Pedro Domínguez, Numeración binaria ED. Argenta Sarlep 1993).

Es adecuado concluir con una cita de Carl R. Boyer:

Queda claro que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre, y si es válido el principio biológico de la supervivencia de los más aptos, entonces es muy probable que la supervivencia de la raza humana se encuentre relacionada con que el hombre haya desarrollado conceptos matemáticos (*A History of Mathematics* John Wiley & Sons, Ins., 1969).

Lecturas sugeridas

- Boyer C. R., *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986.
- Clairbone R., *El nacimiento de la escritura (I)*, Colección Orígenes del Hombre N° 21, Ed. Folio, Barcelona, 1994.
- Domínguez P., *Numeración binaria*, Ed. Argenta Sarlep, Buenos Aires, 1993.
- Rey Pastor J. y Babini J., *Historia de la Matemática vol. I*, Ed Gedisa, Barcelona, 1986.
- Vera F., *Breve Historia de la Matemática*, Ed. Losada, Buenos Aires, 1946.