LO VEO Y NO LO CREO! LA HISTORIA DEL INFINITO MATEMÁTICO

¿Cuán grande es un conjunto infinito? Se expone brevemente el largo camino - de más de 20 siglos - que recorrieron los matemáticos hasta poder pensar con y acerca de conjuntos infinitos.

Virginia Montoro

¿Cuán grande es un conjunto infinito?

La palabra infinito forma parte del lenguaje cotidiano, en unas ocasiones como adjetivo, como cuando decimos la variedad de colores es infinita, y en otras como sustantivo, como en el caso de: el infinito es un juego para el pensamiento. Pero, ¿cuán grande es una cantidad infinita? ¿El número de granos de arena de una playa o la cantidad de átomos del planeta Tierra son infinitos? La respuesta es "no". Ambos son cantidades finitas y, por muy grandes que sean, no están más cerca del infinito que las cifras 2, ½, 2008 ó 36,6.

Al preguntarnos ¿cuántos elementos tiene el conjunto de los números naturales?, o ¿cuántos puntos tiene una recta?, es posible que respondamos: infinitos. Pero en el curso de estas reflexiones pueden planteársenos muchos interrogantes sobre la naturaleza y posibilidad de existencia de las colecciones infinitas, ya que es muy difícil encontrar en la cotidianidad de nuestros sentidos un conjunto infinito. En general lo que nos rodea es finito y para pensar en lo infinito tenemos que realizar un enorme esfuerzo de imaginación.

Podremos, sin embargo comenzar a contar uno, dos, tres, y seguir contando, o al menos imaginar que contamos, sin detenernos jamás. Cada vez que tengamos un número, tendremos otro más grande y así siguiendo infinitamente. O, como ilustra la Figura 1, podemos enfocar la cámara web hacia la pantalla de nuestra computadora y tendremos una imagen dentro de otra y otra … Podemos imaginar lo infinitamente pequeño como algo que se hace cada vez más chico sin detenerse jamás.

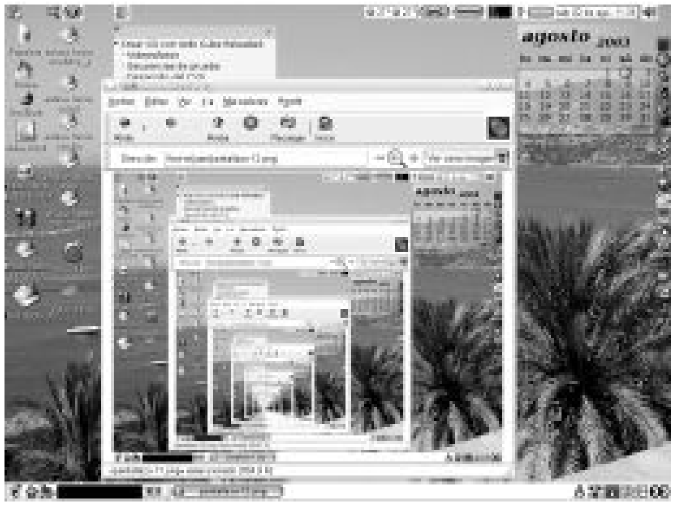

Fig. 1. Podemos ver una imagen dentro de otra y otra… e imaginar que no terminan jamás.

Palabras claves: infinito, matemática, paradoja, teoría de conjuntos

Virginia Montoro
Profesora de Matemáticas y Magíster en Educación en Ciencias, mención Matemática. Universidad Nacional del Comahue.
Centro Regional Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar

Recibido: 28/04/08. Aceptado: 13/08/08

Infinito ¡Qué horror!

Ya los antiguos filósofos griegos pensaban el infinito de esta manera, denominándolo infinito potencial, posiblemente asociado a la infinitud potencial del tiempo, en el sentido de algo que podía seguir sucediendo siempre. Pero tanto para Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) como para Euclides (aprox. 300 a C.) no podía existir el infinito actual, es decir infinitos elementos existentes simultáneamente. El horror al infinito en los filósofos griegos antiguos se expresó en la palabra elegida para designar el infinito: apeiron, que tiene un sentido peyorativo. El caos era apeiron, una línea quebrada es apeiron, un pañuelo arrugado era apeiron. Aristóteles en su Física dice que "... ser infinito es una privación, no es una perfección sino una ausencia de límite...".

Los griegos antiguos, en su forma empirista de conocer no encontraban en su "realidad" nada que pudiese ser llamado infinito en forma actual. Es que un infinito completo y actual sólo puede encontrar una realidad en nuestra mente.

Aristóteles establece explícitamente la imposibilidad del infinito actual y, con ello, podríamos decir que se expulsa de las matemáticas la posibilidad de pensar en conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente existentes. De hecho, esta imposibilidad resultó dominante en el trabajo que matemáticos y filósofos desarrollaron durante más de 20 siglos.

Euclides, en su magnífica obra matemática Elementos, usa sólo el infinito potencial, evitando permanentemente la explicitación del infinito actual. Por ejemplo, dice: "para una cantidad dada de números primos, existe uno mayor", teorema que en cambio hoy se enuncia así: "existen infinitos números primos". Asimismo, los matemáticos clásicos expresan que un punto pertenece a una recta, pero no hacen explícito que la misma está compuesta de infinitos puntos. Por otra parte, Euclides enuncia, asignándole el status de noción común, que "el todo es mayor que cada una de las partes", principio que, veremos, parecen contradecir los conjuntos infinitos.

Pero este horror al infinito actual, o a una infinitud de elementos presentes en un mismo instante, constituía ya entonces un obstáculo para las matemáticas griegas. Es el caso de la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga, atribuida a Zenón de Elea (filósofo griego del siglo V a.C.), quien plantea el problema en los siguientes términos: Aquiles, el más veloz de los griegos, persigue una tortuga que se arrastra alejándose de él (ver Figura 2). Zenón pretende que el héroe no puede alcanzar al animal. Hallándose el hombre, en el instante de la partida, a una cierta distancia del animal, un tiempo después la distancia ente ellos se habrá hecho dos veces menor que la inicial, luego alcanzará un tercer instante en el que la distancia considerada, reducida nuevamente a la mitad, o sea el cuarto de la distancia inicial. Y luego un cuarto instante en el que la distancia de Aquiles a la tortuga será el octavo de su valor inicial. Siguiendo este proceso infinito, Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga.

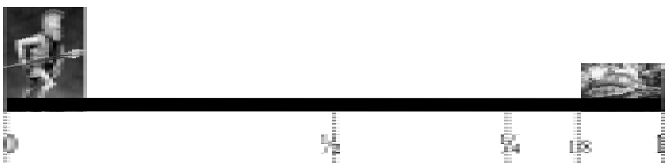

Fig. 2. Aquiles y la tortuga.

Del horror *infiniti* a la explicitación del infinito actual (o infinito matemático)

La lección de los filósofos clásicos fue determinante durante casi 20 siglos: el infinito quedó fuera de las matemáticas formales. Galileo Galilei (1564-1642) fundamenta la imposibilidad de la existencia de conjuntos infinitos, al comprobar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números enteros y sus cuadrados, lo que podría interpretarse como que hay tantos números enteros como números cuadrados, lo que contradice la noción común de Euclides: "el todo es mayor que las partes". El horror infiniti persiste aún en Gauss, quien en 1831 manifiesta que el hablar de una cantidad infinita como cantidad completa jamás está permitido en Matemática.

El matemático Hilbert (ver cuadro sobre los matemáticos del infinito actual) ejemplificó las nociones contraintuitivas que se presentan al operar con el infinito actual mediante la imagen de un hotel de infinitas habitaciones numeradas 1, 2,3, … Aún cuando estuviera completo, en este hotel siempre habría lugar para un nuevo huésped; ante la llegada de un viajero, el conserje levantaría tranquilamente el teléfono y pediría amablemente que el ocupante de la habitación 1 se mude a la habitación 2, el de la habitación 2 a la habitación 3, el de la 3 a la 4 y así sucesivamente. Mediante esta sencilla operación, la habitación 1 quedaría vacía, disponible para el nuevo huésped; todos los ocupantes del hotel tendrían, como antes de su llegada, una habitación (aunque distinta a la que ocupaban), y el hotel seguiría, también como antes, completo. Ahora supongamos que en vez de llegar un solo viajero, llegase un contingente de infinitos pasajeros. El conserje, esta vez, indicaría al ocupante de la habitación 1 que se mudara a la 2, al de la 2, a la 4, al de la 3, a la 6; y otra vez lograría acomodar a la infinitud recién llegada en las habitaciones impares, que quedarían todas vacías. Y si la dirección del hotel decidiera clausurar la mitad de las habitaciones, no por eso la cantidad de cuartos cambiaría. Sería la misma, y "tan" infinita como antes.

Es éste un ejemplo de que concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente (es decir, pensar en un infinito actual, o matemático) requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción. Para representarnos una cantidad infinita es necesario tratar las cantidades de un modo muy diferente al que es habitual cuando enumeramos o precisamos la cantidad de elementos de una colección finita. En otras palabras, para concebir un conjunto infinito como una entidad en sí, imposible de visualizar en su extensión, debemos renunciar temporariamente a atender a cuáles y cómo son sus elementos específicos.

Sin embargo mediante el empleo libre, más bien implícito, de conceptos tales como cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes por parte de Newton y Leibniz, en el siglo XVII se precipita una cadena de desarrollos muy importantes para la ciencia matemática. Sin embargo, recién en 1876, a través de los trabajos de fundamentación de la matemática de lógicos y matemáticos de la época (entre otros, Meray, Cantor, Dedekind y Weierstrass) se solucionan al mismo tiempo los problemas de la definición de número real y de la definición rigurosa de la noción de límite. Esto fue posible sólo gracias a la aceptación explícita de la existencia de conjuntos actualmente infinitos.

A comienzos del siglo XIX, Bolzano redacta las Paradojas del infinito, donde reivindica la existencia del infinito actual e introduce el uso de conjuntos infinitos. También reconoce que la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos es, precisamente, la posibilidad de estos últimos de estar en correspondencia biunívoca con una parte propia. Por ejemplo, los números enteros se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números pares, es decir que para cada entero: n, hay un número par: 2.n, a diferencia de lo que sucede con un conjunto finito como el de los diez primeros enteros (1,2,3,4,5,6,7,8,9 y 10) en el que los pares son la mitad (2,4,6,8 y 10).

A fines del siglo XIX, G. Cantor enuncia la Teoría de Conjuntos, en la cual trabaja con conjuntos infinitos; muestra que no todos los conjuntos infinitos son igualmente infinitos. Establece el concepto de potencia de una colección infinita, que más tarde conoceríamos como cardinalidad. Según Cantor, dos conjuntos tienen la misma potencia si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de estos conjuntos. Como todos sabemos, para comparar el tamaño de dos conjuntos se puede ir aparejando cada elemento del primero, con cada uno del segundo. Por ejemplo, si tenemos dos baldes uno con bolillas rojas y otro con bolillas negras, podemos ir sacándolas de a pares, una roja y una negra. Si cuando no puedo formar más pares no han quedado bolillas en ningún balde, concluiríamos que ambos tienen la misma cantidad de bolillas. Si en cambio han quedado bolillas en uno de los baldes, esto nos sirve de comparación: ése balde contenía más bolillas que el otro. De este principio elemental se valió Cantor para comparar conjuntos infinitos.

Pero durante años, el mismo Cantor evita hablar de la potencia de un conjunto infinito como un número. En 1883 comienza a considerar a todos los conjuntos de igual potencia como equivalentes y a denominar cada clase de equivalencia como un número cardinal transfinito, al que recién diez años después bautiza con la letra hebrea Alef: $\aleph$.

Cantor demuestra que hay tantos números pares como naturales, tantos naturales como fracciones (o racionales), lo que enfrenta aspectos centrales del sentido numérico básico humano. En vistas de que entre dos números racionales siempre hay otro racional (a lo que se llama: densidad de los números racionales), mientras que los números enteros se sitúan alejados uno de otro sobre la recta, puede parecer contrario a la intuición que ambos conjuntos puedan ponerse en correspondencia biunívoca.

El siguiente paso de Cantor fue demostrar que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales. Si consideramos los números racionales de un segmento, por pequeño que éste sea, hay en él infinitos números racionales, pero aún cuando este conjunto sea denso, hay espacio en él para alojar infinitos números irracionales (que no se pueden escribir como fracción de enteros).

Años más tarde Cantor comunica que, contrariamente a la opinión matemática prevaleciente, es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la recta y el plano, por ejemplo un cuadrado tendrá la misma cantidad de puntos que uno de sus lados, para lo que en una carta a su amigo Dedekind usa la expresión "¡Lo veo y no lo creo!". Sin embargo, puede encontrar un conjunto que sea más infinito que la recta o el plano… y así siguiendo.

Las ideas de Cantor resultaron tan chocantes a la intuición de sus contemporáneos, que Poincaré (1854-1912) las cataloga como: "una enfermedad de la que algún día llegarían las matemáticas a curarse". Kronecker, su profesor, le ataca personalmente calificándolo de "charlatán científico, renegado y corruptor de la juventud", e incluso bloquea la publicación de sus trabajos en el Journal de Crelle, del cual Kronecker es editor.

Distintos infinitos

Al comienzo de su carrera, Cantor realizó un estudio en relación a la unicidad de las series trigonométricas que convergen a una función dada discontinua en un "conjunto infinito de puntos excepcionales". Esto le hizo prestar mayor atención a las propiedades de la recta real, que a los teoremas sobre estas series. Cantor consideraba sin discusión la existencia de una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, por lo tanto el problema de describir el continuo de puntos de una recta era análogo al de estudiar las propiedades del sistema de números reales.

Para comprender mejor el método utilizado por Cantor, supongamos que tenemos en una sala una cierta cantidad de personas, como vemos en la Figura 3. Queremos saber si tenemos el mismo número de sillas que de personas, pero contarlas no nos es posible dado que se mueven permanentemente. Una manera de proceder sería hacer sentar a una persona (y sólo una) en cada silla; si ninguna queda de pie y no sobra ninguna silla podemos asegurar que tenemos la misma cantidad de personas que de sillas.

Para comparar el tamaño de dos conjuntos se puede ir aparejando cada elemento del primero, con cada uno del segundo; en nuestro ejemplo cada persona con una silla. Siguiendo esta forma de razonar podríamos decir que hay tantos números enteros pares como pares e impares reunidos. Nos bastaría pensar que cada entero par puede ser aparejado con su mitad y

Fig. 3. Cada persona en una silla y solo en una.

esto es una correspondencia biunívoca.

2	1
4	2
6	3

....

Si aceptamos este sencillo procedimiento para comparar conjuntos, nos vemos obligados a afirmar que: si en Matemática son admisibles conjuntos infinitos entonces, hay tantos números enteros pares como pares e impares reunidos. Este hecho parece contradecir la "noción común" de Euclides, "el todo es mayor que cada una de las partes". Cantor toma prestada la paradoja de Galileo y la convierte en un procedimiento de comparación del tamaño de conjuntos infinitos. Define a dos conjuntos como de igual potencia cuando puede establecerse entre los elementos de uno y el otro una correspondencia biunívoca; se desentiende entonces de la "noción común" de Euclides.

Es usual definir a un conjunto finito (de una cantidad cualquiera de elementos que indicamos con una n, o de cardinal n) como un conjunto que puede ser puesto en correspondencia biunívoca con un subconjunto de números naturales de la forma {1,2,3,4,5,....,n}. De esta forma un conjunto infinito es todo conjunto que no es finito, pero notemos que para esta definición se supone dada la definición de número natural. Cantor aplicando el principio de correspondencia demostró que la propiedad que Galileo había considerado paradójica, era en realidad, una condición necesaria y suficiente de los conjuntos infinitos. Esto nos lleva a una nueva definición de conjunto infinito: "aquel que puede estar en correspondencia biunívoca con una parte propia del mismo". Esta definición no necesita de la de número natural, lo que luego redunda en uno de los mayores logros de la Teoría de Conjuntos: poder definir el número natural como cardinal de los conjuntos finitos.

Cantor exhibió un método refinado e ingenioso para demostrar que el conjunto de los números racionales podía quedar en correspondencia con los enteros, es decir que ¡hay tantas fracciones como números enteros! El conjunto infinito de los números racionales (fracciones), se puede ordenar en un cuadro infinito tal que en cada línea figuren las fracciones con igual numerador y todos los denominadores posibles, como se muestra en la Figura 4.

Fig. 4. Hay tantas fracciones (o números racionales) como números naturales. Podríamos colocar aquí a cada número racional y asociarlo con un número natural, conforme vamos recorriendo la trayectoria señalada por las flechas.

Cantor denominó "numerables" a aquellos conjuntos que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos (es decir se pueden poner en una lista). Sabemos que los números enteros están situados sobre una recta con cierta relativa rareza y que entre dos fracciones siempre podemos encontrar otra fracción, hecho conocido ya por los griegos y llamado densidad de los números racionales sobre la recta. Puede entonces parecer muy extraño que ambos conjuntos puedan ponerse en correspondencia biunívoca.

El siguiente paso de Cantor fue todavía más impresionante: demostró que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y los puntos de una recta, es decir el conjunto de los números reales. Semanas antes de llegar a este resultado había planteado la suposición con-