



2009-Año Internacional de la Astronomía

# EL PROYECTO ERATÓSTENES 2009 EN LA ARGENTINA

Más de doscientas escuelas argentinas y de países limítrofes recrearon el método que usó Eratóstenes hace más de 2000 años para estimar el radio terrestre.

**Guillermo Mattei y Francisco D. Mazzitelli**

Observando cuidadosamente los fenómenos naturales que nos rodean, es posible llegar a conclusiones que, a veces, son sorprendentes. En el Siglo III antes de Cristo, Eratóstenes, un matemático, astrónomo, geógrafo y poeta griego, fue capaz de estimar el perímetro de la Tierra midiendo la sombra de una varilla durante el solsticio de verano (21 de junio, comienzo del verano en el hemisferio norte). Eratóstenes notó que en el solsticio de verano, la luz del Sol llegaba, al mediodía, a la parte inferior de un pozo profundo de la ciudad de Siena (hoy Aswan, Egipto). Es decir que los rayos solares llegaban perpendicularmente al piso ese día, en ese momento y en ese lugar. Mientras tanto, no ocurría lo mismo en Alejandría, distante unos 400 km. de Siena, donde una varilla producía sombra aún durante el mediodía solar. Suponiendo que el Sol se encuentra a una distancia suficientemente grande de la Tierra como para que los rayos solares lleguen a la Tierra desde la misma dirección en ambos lugares, una explicación sencilla para este efecto es que la superficie de la Tierra no es plana sino que tiene forma esférica. Con argumentos geométricos sencillos, es posible estimar el perímetro terrestre midiendo el ángulo con que los rayos solares inciden sobre Alejandría, es decir, midiendo el tamaño de la sombra de una varilla (ver recuadro "El método de Eratóstenes").

Desde hace varios años, estudiantes de escuelas medias argentinas recrean la observación de Eratóstenes. La experiencia fue organizada por diversas instituciones del país desde 2005, durante el Año Internacional de la Física, basándose en experiencias similares realizadas en Estados Unidos y Francia. En

particular, en el año 2009, y en conmemoración del Año Internacional de la Astronomía (AIA 2009), el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, el Nodo Nacional Argentino del AIA 2009 y la Asociación Física Argentina (AFA) aunaron esfuerzos para que el evento fuera de mayor envergadura, involucrando un gran número de escuelas, profesores y estudiantes. Se contó con el auspicio de la Filial Buenos Aires de la AFA y del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva.

## Una experiencia enriquecedora

La experiencia es indudablemente instructiva y despierta el interés de los alumnos y profesores por diferentes motivos. En primer lugar, por lo ingenioso de la idea. El hecho de poder hacer la estimación del perímetro terrestre (algo mayor a 40.000 km.) midiendo la sombra en el mediodía solar en dos lugares no demasiado alejados (unos 400 km.) despierta sorpresa y admiración. En segundo lugar, la discusión con los alumnos permite trabajar unificadamente conceptos de matemática, geografía, astronomía, física e incluso historia.

Más específicamente, en el área de la matemática, esta actividad permite ejercitar y fijar conceptos de geometría: distintas maneras de medir los ángulos, uso de la trigonometría, propiedades de círculos y esferas. En el área de la astronomía, la física y la geografía, la observación de la existencia de solsticios y equinoccios lleva naturalmente a preguntarse por qué existen lugares particulares sobre la superficie terrestre (Trópicos de Cáncer y Capricornio) y momentos particulares en la órbita de la Tierra alrededor del Sol, qué es lo que determina las estaciones, por que las estaciones no son simultáneamente las mismas en los hemisferios norte y sur y más. También surgen discusiones relacionadas con el orden de magnitud de las distancias involucradas.

Desde el punto de vista histórico, se pueden plantear preguntas interesantes como: ¿Cuáles fueron los argumentos que llevaron a Colón a planear su viaje a las Indias saliendo hacia el oeste? ¿Había otras maneras de inferir cuál es la geometría de la superficie de la Tierra?

### Guillermo Mattei<sup>(1)</sup>

Dr. en Física, UBA.

### Francisco Diego Mazzitelli<sup>(1)</sup>

Dr. en Física, Instituto Balseiro, Argentina.  
Profesor Asociado e Investigador del CONICET.  
fmazzi@df.uba.ar

<sup>(1)</sup> Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Univ. de Buenos Aires (UBA), Argentina.



### Videoconferencia en la Biblioteca de Alejandría, Egipto.



Por otra parte, existe una serie de recaudos a ser tenidos en cuenta al realizar las mediciones. Debe medirse la sombra mínima, es decir, en el momento en que el Sol está localmente en el cenit (¡el mediodía solar no ocurre invariablemente a las 12.00 hs.!) y la varilla debe ser colocada perpendicularmente al piso. A pesar de todos estos cuidados, y como en cualquier experimento, aún en los realizados en los laboratorios más sofisticados del mundo, los resultados de las observaciones tienen errores. La discusión de este hecho con los alumnos puede llevar a discusiones profundas acerca del carácter aproximado y transitorio de las leyes naturales, y a concebir a la ciencia como un conjunto de conocimientos que evolucionan y se van perfeccionando a lo largo del tiempo, y no como verdades absolutas que permanecerán siempre como tales.

Otro aspecto importante es que no es posible realizar la actividad en una única escuela: es necesario formar «pares» de escuelas que compartan sus mediciones para poder lograr el objetivo. Más aún, si bien los resultados obtenidos para el radio o el perímetro terrestre por cada par de escuelas pueden ser bastante diferentes, el promedio de esos datos da una estimación mucho más precisa, lo cual convierte a esta actividad en un proyecto colectivo en el que el intercambio de ideas, datos y experiencias vividas es enriquecedor en muchos sentidos.



### La coordinación de la actividad

En principio, si la medición se realiza durante el solsticio del 21 de junio, una única escuela podría determinar el radio de la Tierra conociendo su distancia al Trópico de Cáncer o, durante el 21 de diciembre, conociendo su distancia al Trópico de Capricornio. En cualquier otro momento del año, tal como se explica en el recuadro, la estimación debe realizarse combinando necesariamente las mediciones de dos escuelas.

A los efectos de coordinar el proyecto, se habilitó una página web para que las escuelas interesadas se inscribieran. Una vez acreditadas todas las escuelas participantes, y caracterizadas por sus coordenadas geográficas, se propuso una distribución de pares de escuelas. La composición de dichos pares siguió criterios y métodos numéricos de optimización aplicados sobre la distribución de las localidades en todo el territorio, a través de un software especializado que maximizó la componente Norte-Sur y minimizó la componente Este-Oeste de las distancias entre las escuelas asociadas. De esta manera, se favoreció el hecho de que las mediciones de las cuales se inferiría el radio terrestre se realizaran entre escuelas lo más alineadas posibles en un mismo meridiano y de paralelos lo más alejados posibles. Dado el gran número de instituciones educativas concentradas en la región de Capital Federal y Gran Buenos Aires, algunos establecimientos del interior del país formaron parte de más de un par de escuelas.

Una vez establecidos los pares de escuelas, éstas se pusieron de acuerdo en el día de la medición (preferentemente el 21 de junio de 2009, o dos o tres días antes o después, en función del calendario escolar y de la proyección de las condiciones climáticas en una o en las dos escuelas asociadas), en el método y la

El Bolsón.



2009-Año Internacional de la Astronomía



configuración experimental, los criterios para estimar errores de medición, el trabajo de los grupos, el método para determinar el mediodía solar y todos los otros variados aspectos que surgieron del contacto.

Las mediciones se realizaron en el momento del mediodía solar en las localidades de cada una de las escuelas. Como se indicó anteriormente, este momento se produce cuando el Sol pasa por el plano que contiene al meridiano de la ubicación de la escuela, o cuando las sombras solares de cualquier objeto son mínimas. Las escuelas no sólo usaron tablas que indican a qué hora local se produce el mediodía solar, también lo determinaron experimentalmente midiendo sombras a intervalos regulares de tiempo en los días previos a la medición.

Lo que se mide en forma directa es la sombra de una varilla vertical (clavada en el piso, suspendida o montada sobre una base nivelada) y la longitud de ésta. Con ambos datos es posible calcular la inclinación de los rayos solares al mediodía solar de ese día. Cuando cada una de las dos escuelas asociadas dispone del valor medido por la otra y de la componente Norte-Sur de la distancia que las separa, se puede calcular el valor del radio terrestre.

La distancia Norte-Sur entre las dos escuelas asociadas no se obtuvo como lo hizo Eratóstenes, es decir, con agrimensores (*behamistas*) que caminaban a pasos regulares entre ambas ciudades y aportaban el dato en unidades llamadas *estadios*, sino por medio de Internet ya sea mediante los sitios web de mapas satelitales o de tablas de distancias al Ecuador.

Comodoro Rivadavia.

Cada escuela reportó por Internet sus mediciones y resultados, de modo que, tanto por esa vía como por el contacto directo, se conocieron las mediciones y resultados de la escuela asociada, lo cual permitió a ambos establecimientos calcular un valor del radio terrestre propio de ese par. Todos los radios que surgieron de los diferentes pares integraron una base estadística de la cual se obtuvo un resultado representativo de todas las escuelas participantes del proyecto.

**La actividad en números. Resultados**

Participaron 256 escuelas de Capital Federal y 18 provincias argentinas (Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 22; Provincias de Buenos Aires, 91; Catamarca, 2; Chubut, 4; Córdoba, 24; Corrientes, 1; Entre Ríos, 3; La Pampa, 14; La Rioja, 2; Mendoza, 15; Neuquén, 4; Río Negro, 7; Salta, 9; San Juan, 1; San Luis, 3; Santa Fé, 25; Santiago del Estero, 2; Tierra del Fuego, 4; Tucumán, 23), 9 escuelas de Uruguay y 1 de Chile. Los alumnos involucrados en la actividad superaron los 15.000. Las mediciones se pautaron entre el 18 y el 24 de Junio de 2009.

Los pares de escuelas que aportaron a la medición conjunta fueron 207, distribuidas de manera optimizada. 157 pares estuvieron compuestos por escuelas que midieron simultáneamente en el mediodía solar y 50 que lo hicieron confrontando su medición con los de una hipotética escuela ubicada en el Trópico de Cáncer (debido a la deserción de 50 escuelas registradas que no pudieron medir por cuestiones logísticas). Los valores obtenidos por cada par de escuelas para el radio terrestre  $R$  variaron entre 4.000 km. y 10.000 km. Haciendo un análisis estadístico de todos los resultados obtenidos, se obtuvo como resultado final para el radio terrestre:

$$R = (6.290 \pm 60) \text{ Km}$$

El error consignado es sólo el estadístico, ya que no hemos solicitado a las escuelas que informen sobre las estimaciones de los errores de sus mediciones. Es más, en muchos casos las escuelas no discutieron este tema, por considerar que tiene un nivel de complejidad demasiado alto como para discutirlo en clase. Según los valores tabulados, el radio terrestre medio es de  $R = 6.371 \text{ Km}$ , por lo que el resultado del experimento fue muy satisfactorio.



### San Vicente, Buenos Aires.

#### “En nombre de la ciencia y el compañerismo”

Este proyecto, además de contribuir al estímulo del uso de la matemática como idioma para la descripción de la Naturaleza y a la discusión de los aspectos históricos que rodean a Eratóstenes, propició un interesante intercambio social entre centenas de docentes y miles de alumnos.

A modo de ejemplo, valga este testimonio de una docente tucumana: *“Ayer pudimos realizar, con grupos de estudiantes de 1º, 2º y 3º año de escuela secundaria básica, las mediciones en la Escuela 12 de Octubre, de Colonia N° 4, Colombres, Departamento Cruz Alta, Provincia de Tucumán. La nuestra es una escuela pública, mixta y rural. Se encuentra ubicada dentro de una ex colonia del Ingenio Cruz Alta, rodeada de cañaverales, distante a 28 Km de la capital de la provincia de Tucumán, sobre un camino vecinal. El único acceso a la misma es una línea de transporte público de pasajeros, que posee un recorrido muy restringido, puesto que el movimiento de usuarios se limita a los alumnos y al personal de la institución escolar. La población estudiantil es de escasos recursos económicos, sus padres o tutores son trabajadores golondrinas de la zafra, están desempleados, hacen changas o reciben algún tipo de plan otorgado por el gobierno provincial. Muchos de nuestros alumnos tienen serios problemas de aprendizaje. La escuela cuenta con una computadora pero sin acceso a Internet. Los chicos no tienen conocimientos de trigonometría, por lo que midieron el ángulo con un transportador. Para ellos la experiencia fue maravillosa y enriquecedora, sobretodo el hecho de sentirse en contacto con chicos todo el país. Esperamos ansiosos otra oportunidad para unirnos en nombre de la ciencia y el compañerismo”.*

Además hubo situaciones tales como la de varios docentes salteños que se movilizaron desde sus escuelas rurales a los locutorios de las ciudades a enviar los datos. Ésta y muchas otras anécdotas delinean el compromiso colectivo generado por el proyecto. En este sentido, podemos concluir que la actividad ha trascendido el objetivo meramente educativo y ha alcanzado otros de carácter social.

A partir de los testimonios docentes también se pudo concluir que el proyecto permitió a los estudiantes descubrir que la sistematicidad de sus asignaturas en la



escuela media no colisiona con la creatividad y diversión que conlleva el cultivo de la indagación científica.

Finalmente, hubo un intercambio más allá de las fronteras del país y de los países hermanos. La (Nueva) Biblioteca de Alejandría organiza todos los 21 de junio una festividad dedicada a Eratóstenes mediante diferentes actividades culturales, educativas y de divulgación tales como talleres interactivos, charlas, determinación del radio terrestre por parte de grupos de colegios presentes en el lugar, etc. Este año, como parte del evento, se organizó una videoconferencia en el Hall Central de la Biblioteca en la que participaron alumnos de distintos lugares del mundo. Particularmente, el proyecto argentino tuvo la oportunidad de participar, desde Buenos Aires, con un grupo reducido de estudiantes de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), a través del contacto que lograra la astrónoma Beatriz García (Laboratorio Pierre Auger, UTN-Mendoza, co-organizadora del Proyecto) con la directora de la Biblioteca en el lanzamiento en París del Año Internacional de la Astronomía 2009. En la videoconferencia, realizada el mismo domingo 21 de junio entre las 9 y las 10hs de la mañana, también participaron docentes y estudiantes de Alejandría, Aswan y de Virginia (Estados Unidos). La idea fue comentar, principalmente para unos doscientos chicos que estaban presentes en Alejandría, acerca de los materiales que se utilizaron en las mediciones y cuáles fueron los resultados obtenidos.

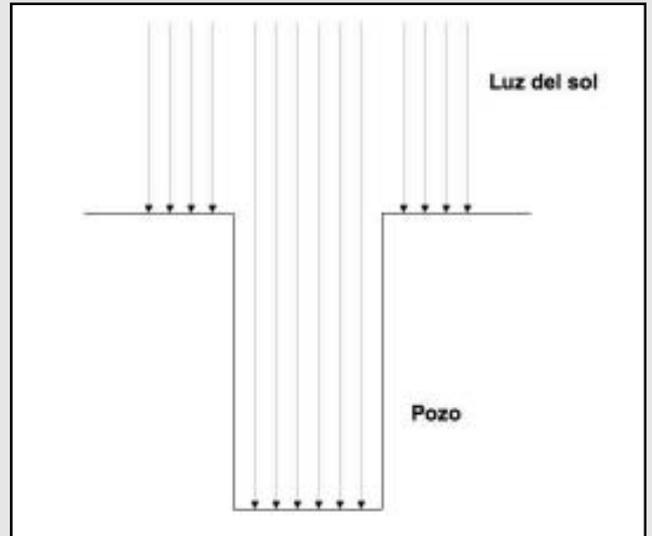
Con sus dos mil trescientos años de antigüedad, este método de medición del radio terrestre es muy sencillo, enriquecedor y demanda un esfuerzo de coordinación moderado. Esto nos impulsa a seguir adelante con esta experiencia educativa, realizándola periódicamente y generalizándola a escuelas de toda Sudamérica.



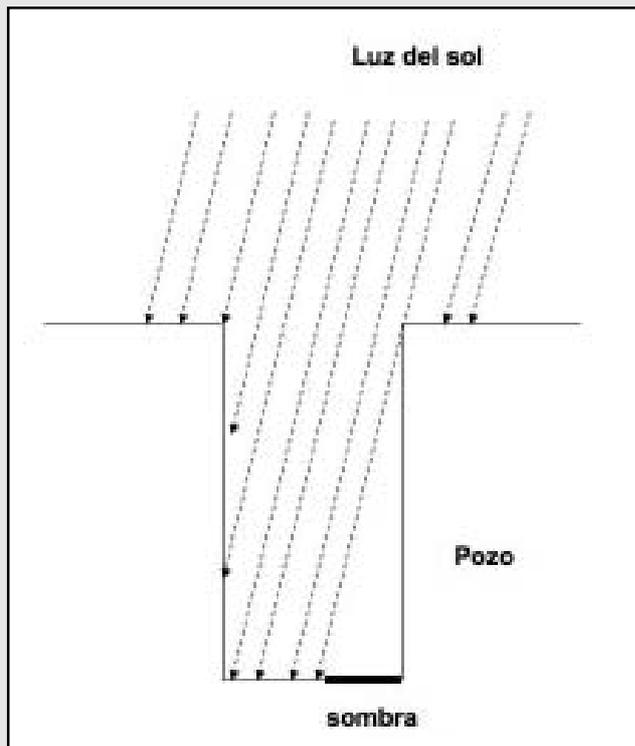
## EL MÉTODO DE ERATÓSTENES

El solsticio de verano en el hemisferio norte (aproximadamente el 21 de junio) es el día en que los rayos solares caen perpendicularmente sobre el Trópico de Cáncer al mediodía (lo mismo ocurre alrededor del 21 de diciembre en el Trópico de Capricornio).

Eratóstenes había observado que, al mediodía del solsticio de junio, la luz del sol entraba perpendicularmente a la superficie terrestre en la ciudad de Siena (actualmente Aswan, Egipto). Su observación estaba basada en el hecho que, sólo en ese momento, la luz solar llegaba al fondo de un pozo profundo ubicado en esa ciudad (Figura 1). Eratóstenes también sabía que mientras que esto ocurría en Siena, no sucedía lo mismo en Alejandría, una ciudad ubicada a unos 400 km; al norte de Siena.



**Figura 1.** Los rayos del Sol entran de modo perfectamente vertical dentro del pozo ubicado en Siena, cuando el Sol está exactamente sobre esta ciudad (21 de junio al mediodía). En ese momento, las paredes no proyectan sombra alguna sobre el fondo del pozo.



**Figura 2.** En el mismo momento en que en Siena los rayos del Sol entran al pozo como en la Figura 1, en Alejandría los rayos entran formando un ángulo no nulo con la vertical. En este caso las paredes proyectan cierta sombra sobre el fondo del pozo.

En la Figura 2, vemos que si los rayos del Sol no llegan perpendiculares al piso, las paredes de un lado del pozo proyectan sombra sobre el fondo. Por el mismo motivo, una varilla colocada de manera perfectamente vertical produce una sombra aún al mediodía. Eratóstenes usó una sombra como ésta para calcular el perímetro de la Tierra. Cuando el Sol estaba exactamente sobre Siena (al mediodía del 21 de junio), midió la sombra de un objeto en Alejandría. Conociendo el largo del objeto, el de su sombra, y la distancia entre Siena y Alejandría, calculó el perímetro terrestre.

En la Figura 3 describimos la situación en ambas ciudades. Siena está representada por el punto S y Alejandría por el punto A, ambos sobre la superficie de la Tierra, a la que se ve como una circunferencia. La longitud de arco entre S y A es  $d$ , y el ángulo correspondiente a este arco es  $\theta$ . El radio de la Tierra es  $R$ . Al mediodía del 21 de junio, los rayos inciden perpendicularmente a la superficie de la Tierra en la ciudad de Siena, y por lo tanto tienen la misma dirección que la recta que une esta ciudad con el centro de la Tierra.

Midiendo la sombra de una varilla en Alejandría en

ese momento, es posible determinar el ángulo  $\theta$ . En efecto, utilizando nociones sencillas de trigonometría es fácil convencerse de que

$$\tan \theta = \text{longitud de la sombra} / \text{longitud de la varilla.}$$



Determinando las dos longitudes se calcula la tangente del ángulo,  $\tan \theta$ , y a partir de ella es posible obtener el valor del ángulo (¡actualmente con una calculadora!). Alternativamente puede dibujarse un triángulo rectángulo, con catetos dados por estas dos longitudes, y medir el ángulo  $\theta$  con un transportador.

Por otro lado, el cociente entre el perímetro total de la Tierra,  $P$ , y la longitud de arco,  $d$ , que une los puntos  $S$  y  $A$  sobre la superficie de la Tierra, es igual al cociente entre el ángulo correspondiente a una vuelta entera,  $360^\circ$ , y el ángulo  $\theta$  que define el arco que une  $S$  y  $A$ . Esto quiere decir que

$$P / d = 360 / \theta$$

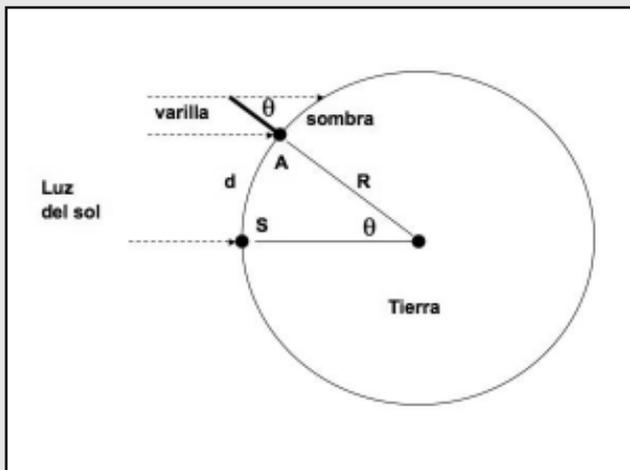
y, por lo tanto,

$$P = 360 d / \theta .$$

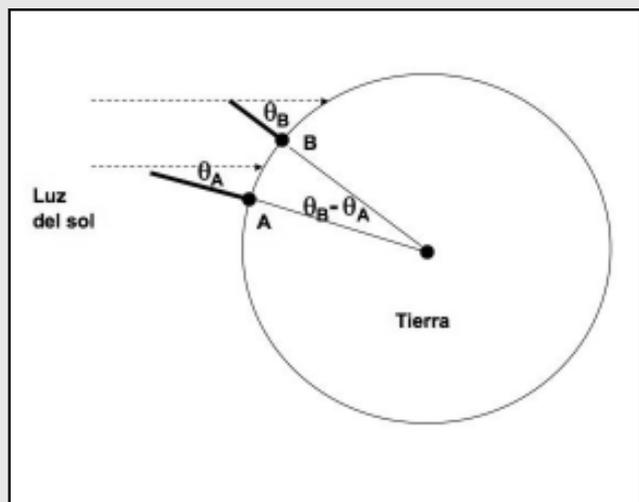
Una vez conocido el perímetro de la Tierra, es muy fácil determinar el radio  $R$ , utilizando la relación entre el perímetro y el radio de una circunferencia

$$R = P / 2\pi.$$

Eratóstenes conocía un lugar en donde el Sol, en un momento particular del año, caía en forma exactamente vertical al mediodía. El experimento puede hacerse también si este no es el caso. Para ello, es necesario determinar la sombra de una varilla en *dos lugares diferentes*. La situación se ilustra en la Figura 4. Los puntos  $A$  y  $B$  corresponden a la ubicación de dos escuelas que colaboran entre sí. Estos dos puntos deben estar ubicados aproximadamente sobre un mismo meridiano terrestre, es decir, separados por una distancia norte-sur a la que llamamos  $d$  en la Figura 4. El experimento da mejores resultados cuanto mayor sea  $d$ .



**Figura 3. Eratóstenes midió la longitud de una varilla y la de su sombra al mediodía del 21 de junio en Alejandría. Luego determinó el ángulo  $\theta$  que formaban los rayos del Sol con la vertical en esta ciudad. Este ángulo coincide con el que subtiende el arco de circunferencia que une las ciudades de Siena ( $S$ ) y Alejandría ( $A$ ).**



**Figura 4. En la figura se muestra la posición de las escuelas  $A$  y  $B$  y la dirección de los rayos del Sol en ambos lugares, dada por los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  respectivamente. En este caso, el ángulo relevante para determinar el perímetro y el radio de la Tierra es la diferencia  $\theta_B - \theta_A$ .**

Midiendo los valores del largo de la sombra y del largo de la varilla en cada escuela, es posible determinar los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$ , como se explicó anteriormente. Una vez conocidos estos dos ángulos, es muy sencillo obtener el valor del radio terrestre. La Figura 4 muestra que el ángulo que subtiende el arco que une los puntos  $A$  y  $B$  es la diferencia entre  $\theta_B$  y  $\theta_A$ . Por lo tanto, podemos determinar el perímetro terrestre a partir de la fórmula:

$$P = 360 d / (\theta_B - \theta_A).$$

Si ambas escuelas no se encuentran sobre el mismo meridiano, la distancia  $d$  que hay que utilizar es la distancia norte-sur entre escuelas, es decir, la distancia entre los paralelos que pasan por ambas escuelas.