

# Reportaje

A Bárbara Brizuela, investigadora en educación matemática

por Marcelo Alonso

**Desde la Patagonia conversó con esta investigadora y educadora acerca de los desafíos y posibilidades implicados en la enseñanza temprana del álgebra. Nos acompañó Virginia Montoro, profesora de álgebra de esta casa de estudios.**

**Bárbara Brizuela** es Profesora Asociada del Departamento de Educación en la Universidad de Tufts, Estados Unidos, y Doctora en Educación por el Colegio de Graduados en Educación de la Universidad de Harvard (Harvard University Graduate School of Education). Sus publicaciones en revistas especializadas y libros abordan el desarrollo y la enseñanza del pensamiento matemático en los niños. Cuenta con una amplia experiencia en la formación de docentes e investigadores en la temática. Una beca de la Fundación Fulbright posibilitó su visita al Centro Regional Universitario Bariloche durante los meses de febrero a mayo de 2009.

**Desde la Patagonia (DLP):** En primera instancia te damos la bienvenida y, distrayéndote de tu agenda de trabajo en el Centro Regional Universitario Bariloche (CRUB), te preguntamos qué estás haciendo y cuál es el motivo de tu visita en esta ocasión.

**Bárbara Brizuela (BB):** Estoy en el CRUB con una beca del Programa Fulbright que, en Argentina, están orientadas a desarrollar trabajo de docencia y de investigación.

Con respecto a las actividades de docencia estoy dictando un curso de posgrado acerca de la enseñanza y aprendizaje de lo que llamamos "álgebra temprana". En cuanto a la investigación, estamos trabajando con varios docentes-investigadores del CRUB en proyectos que ya veníamos desarrollando. Además, estamos pensando en formas de continuar la colaboración internacional entre la Universidad del Comahue, la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad de Barcelona y la Universidad Autónoma de Querétaro. Como parte de la actividad académica, me parece muy importante tener contacto con los docentes de Bariloche y de la región, para lo cual se organizaron dos charlas de divulgación con buena asistencia.

**DLP:** ¿Qué es el álgebra temprana?

**BB:** El álgebra temprana es una postura en cuanto a educación matemática que estudia dónde radican o podrían radicar las razones por las cuales los adolescentes presentan tantas dificultades a la hora de iniciar su educación en álgebra. Tradicionalmente, el argumento era que no habían alcanzado el pensamiento formal, por lo que no podían desarrollar un pensamiento abstracto. Actualmente, distintos grupos de investigación que trabajan en álgebra temprana proponen que en realidad las dificultades que enfrentan los alumnos no se deben a problemas propios, sino a cómo se ha abordado la educación matemática en los grados iniciales de la educación formal.

Partiendo de ese análisis se plantea que el enfoque de la educación matemática y especialmente aritmética en los grados escolares iniciales en cierta medida trabaja y dificulta el aprendizaje posterior de otros contenidos matemáticos. Nosotros publicamos un libro en 2007, que se titula *Sacando a la luz el carácter algebraico de la aritmética*, en el que se plantea que ha habido una interpretación muy estrecha, rígida y limitada de lo que es la aritmética. A los chicos, desde que empiezan su educación formal de matemática y durante seis o siete años de su escolaridad, se los enfoca netamente en temas de números y cálculos, sin darles la oportunidad de pasar a generalizar todos esos aprendizajes. Una definición quizás bastante limitada, pero que ayuda para empezar, sería que el álgebra es la posibilidad de generalizar, de trabajar con variables y de utilizar un lenguaje particular –algebraico- para representar relaciones entre cantidades.

**DLP:** Quizás podrías contarnos cómo proponen ustedes a chicos de grados inferiores, particularmente de tercer grado, que incursionen en temas de álgebra...

**BB:** Lo que nosotros tratamos de hacer con los chicos que están trabajando con relaciones entre cantidades es que puedan generalizar esas relaciones y expresarlas a través de distintos modos. Por ejemplo, si están trabajando en la tabla del 3, buscamos que se den cuenta de que la tabla del 3 es cualquier número multiplicado por 3 y que para poder describir ese tipo de relaciones ya no necesitan remitirse a instancias específi-



teado. En esta transposición didáctica que se hace de la matemática, se dice que la aritmética se enseña de 1° a 5° y luego empieza el álgebra. Nosotros planteamos que, epistemológicamente, la aritmética y el álgebra son un continuo y están totalmente ligadas e interrelacionadas. Desde la perspectiva del álgebra temprana, no se busca desestructurar la enseñanza actual e imponer el álgebra desde los primeros grados. Más bien, se piensa en reflexionar sobre lo que se hace actualmente, enriquecerlo y profundizarlo.

**VM:** Se trata de no poner un límite desde afuera al pensamiento matemático del chico. Si hay un límite, que esté puesto por la propia construcción del aprendizaje y no desde la enseñanza.

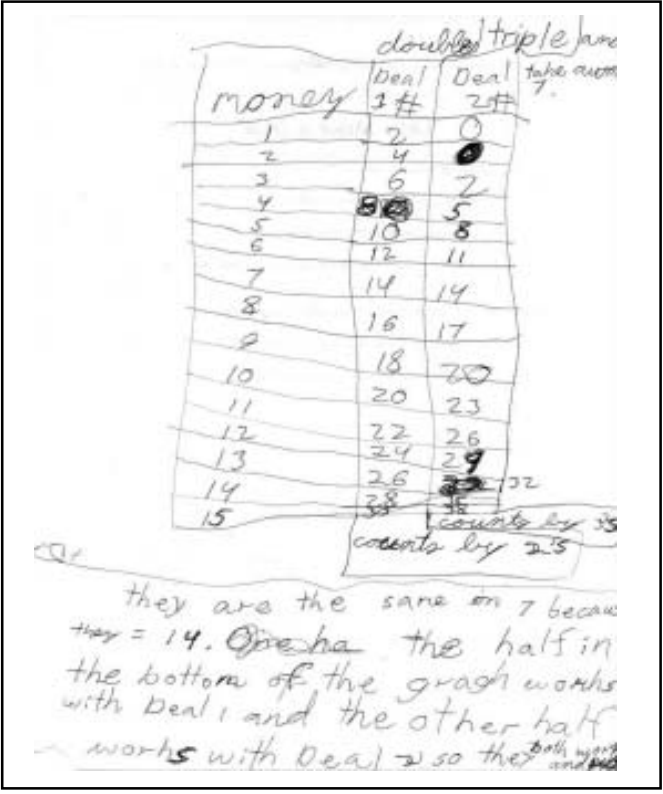
**BB:** El supuesto que lleva a esta distinción entre la aritmética y el álgebra es que en los grados iniciales, el niño aún no podría entender los conceptos. Sin embargo, incluso en los grados superiores, los alumnos tienen muchas dificultades para entender los conceptos. Una metáfora que nosotros usamos cuando pen-

**Figura 1: Jeffrey, de tercer grado (8 años). Muestra su trabajo con el siguiente problema: "La abuela de Raymond le ofrece dos opciones: duplicar su dinero o triplicar su dinero y quitarle 7 dólares. ¿Qué opción debería elegir Raymond?"**

cas. Estamos tratando de evitar todos esos problemas que se dan en la escolaridad más tardía donde es muy común observar que estudiantes secundarios o incluso universitarios necesitan dar un ejemplo, buscar una instancia específica, un número particular. Por ejemplo, cuando se les pide que comenten cómo funciona la tabla del 3 o cuál es la relación entre los números, recurren a explicaciones del tipo: "¿viste que 5 por 3 es 15...?". Nosotros, en un tercer grado de primaria, hemos trabajado el tema de las tablas graficando esas funciones y luego usando un gráfico de coordenadas para poder ver las relaciones entre las cantidades más allá de un listado de números (ver Figura 1). Así, mostramos que la relación entre las cantidades se puede ver a través de una expresión en donde se puede usar letras para representar números.

**Virginia Montoro (VM):** ¿Se puede hablar de álgebra escolar temprana y álgebra en general?

**BB:** Parte del planteo es que los límites entre la aritmética y el álgebra no son tan claros como lo hemos plan-



East Somerville Community School  
The Early Algebra, Early Arithmetic Project  
Equations 6: Grade 4 - Lesson 2B May 1, 2 and 5

Name: Albert Shaw Teacher: Dr. Vignola

There are two students in the front of the class.  
Each box contains the same amount of candies as each other box.  
Each tube contains the same amount of candies as each other tube.  
Each student has the same total number of candies.

Show what each of them has. Write an equation if you can.

$N+Z+20=N+Z+7$

$20=N+7$

Is it possible to figure out many candies are in certain boxes? Explain.

Yes because if you use equations you can figure it out.

**Figura 2: Albert, de cuarto grado (9 años). Muestra su trabajo con el siguiente problema: "Hay dos alumnas. Una tiene 1 caja de caramelos, 2 tubos de caramelos, y 7 caramelos sueltos. La otra alumna tiene 1 caja de caramelos, 1 tubo de caramelos, y 20 caramelos sueltos. Cada caja tiene la misma cantidad de caramelos y cada tubo tiene la misma cantidad de caramelos. Cada alumna tiene la misma cantidad total de caramelos. Muestra qué tiene cada alumna. Escribe una ecuación si puedes. ¿Es posible averiguar cuántos caramelos hay en las cajas? Explica."**

ciertas herramientas. El hecho de poder usarlas de manera continua y en diversas situaciones en su contexto tiene un impacto grandísimo. Resumiendo las dos ideas, algunas dificultades son las mismas en el inicio y en los años avanzados del aprendizaje y, por otro lado, estas dificultades, debidamente documentadas (halladas a tiempo), pueden superarse con una enseñanza adecuada.

**DLP:** ¿Cuáles son las dificultades más comunes?

**BB:** Una de las más comunes es que los alumnos no entienden el signo de igualdad. Lo que se establece a cada lado del símbolo de igualdad tiene características propias, son dos funciones que se ponen en igualdad. La abundante literatura que se ocupa del tema dice que los chicos entienden que el signo de igualdad muestra únicamente el resultado de una operación. Nos ha pasado con chicos de primer grado, quienes después de solamente un año de una enseñanza muy restringida, ya están tan acostumbrados a que los únicos problemas que le dan en la escuela son de del tipo de: "9 menos 3 más 4 igual a...". Luego, si analizan un problema que no tiene una incógnita final después del signo de igualdad, se confunden.

**DLP:** Esta dificultad, ¿la atribuirías en parte a la forma repetida o estereotipada de enseñanza escolar, es decir, a que siempre se enseñe de esa manera?

**BB:** Sí. Durante seis o siete años de educación escolar se presentan expresiones en las que al signo de igualdad siempre le sigue un resultado. De repente, luego de eso le decimos que el signo de igualdad tiene otras funciones... Otras dificultades muy comunes son la incapacidad de representar variables o incógnitas a través de letras, además de problemas para balancear los dos lados de una ecuación. Estas tres dificultades aparecen incluso entre los estudiantes universitarios.

**DLP:** ¿Qué nos puede ayudar a repensar esta situación?

**BB:** Yo creo que puede ser muy útil hacer una analogía con la lengua oral y la escrita, pues es un campo en el que la forma de pensar cómo resolver el problema de la enseñanza parece ser más fluido. Yo siempre les digo a mis alumnos que el hecho de que un bebé

samos en estos temas es que el álgebra es todo un nuevo lenguaje que nosotros queremos que los chicos aprendan, lo mismo que su lengua materna y otra lengua extranjera. No podemos pretender que sólo en esos pocos últimos años de su escolaridad formal puedan aprender todo este nuevo lenguaje, apropiarse de él y empezar a usarlo productivamente.

**DLP:** Escuchando tus presentaciones, me parece que las dificultades que presentan estos niños de tercer grado con quienes ustedes trabajan no difieren demasiado de las que se documentan en estudiantes más avanzados cuando se conectan con el álgebra en la escuela secundaria. ¿Es así?

**BB:** Así es. Hallamos dos hechos para resaltar. Uno es que las dificultades documentadas entre adolescentes son muy similares a las que podemos ver cuando trabajamos con chicos de segundo a cuarto grado, dependiendo del contenido. El otro hecho es que algunas de las dificultades que se documentan en los adolescentes no las vemos entre los niños más chicos. Por ejemplo, después de tres años de intervención en los grados tercero, cuarto y quinto, los chicos usan letras con mucha naturalidad para representar tanto una cantidad variable como una incógnita. Cuando uno habla con docentes de séptimo grado o de primer año del secundario, manifiestan que esos alumnos (pese a ser mayores y cognitivamente más avanzados) tienen a menudo dificultades. Esto nos indica que no todo tiene que ver con una capacidad *a priori* a nivel conceptual, sino también con la posibilidad de acceso a

**Figura 3: Enseñando y aprendiendo álgebra en un campamento de verano con alumnos de quinto a séptimo grado.**



Foto: B. Brizuela

no hable no quiere decir que no pueda hablar o que yo deba contestarle de la misma manera que él habla. Parece hasta trivial y ridículo, pero cuando se piensa desde la matemática, es como decir: no voy a representar las variables o las incógnitas con letras porque el alumno no lo sabe. Estaríamos frenando la capacidad de que él aprenda si sólo enseñamos lo que le es más simple aprender.

**VM:** Este modelo se repite en educación matemática permanentemente, incluso a nivel superior. Es un prejuicio del docente el no exponer a situaciones conflictivas al alumno por el preconcepto de que el estudiante no será capaz de afrontarlas.

**BB:** En matemática pasa esto con todos los límites que se imponen en cada grado de escolaridad: por ejemplo en los límites que se imponen en el rango de números que los chicos pueden trabajar en cada grado (por ejemplo: hasta el cien, hasta el mil), en las operaciones que se trabajan en cada grado: la suma en primer grado, la suma y la resta en segundo grado, la multiplicación en tercer grado, la división en cuarto grado.

**DLP:** ¿Y eso es incorrecto?

**BB:** Es como decir: yo sólo voy a usar palabras cortas al dirigirme a chicos de hasta dos años de edad, porque no pueden entender palabras largas. Entonces hago todo un recorte del lenguaje, uso palabras cortas, uso sólo el tiempo verbal presente y pasado, no voy a usar por ejemplo un pretérito imperfecto porque no se va a entender. Pero eso no es hablar correctamente. También limito el tipo de textos hasta que comiencen la escolaridad, sólo cosas simples... ¿Qué pasa cuando uno traslada esta idea a la matemática? Se imponen límites artificiales que parten de una interpretación *a priori* de lo que pensamos que los alumnos puedan llegar a entender, asumiendo que así facilitamos el acceso de los chicos a estos conceptos o contenidos. Esto es artificial, no representa lo que son ni los conjuntos numéricos, ni las operaciones mate-

máticas. Todo esto tiene que ver con la complejidad de la enseñanza y con cierta postura de miedo a la complejidad. Para que el alumno pueda gradualmente apropiarse de los conocimientos dentro de una cierta complejidad, todo se simplifica y se cae en la creación de un contenido lineal...

**DLP:** Entonces, ¿por qué se sigue enseñando matemática de esta manera, si produce los problemas que venimos discutiendo?

**BB:** Bueno, en el caso de la matemática, los docentes de secundaria sufren en su trabajo diario por todos estos defectos que se han estado creando y repitiendo. La cantidad de chicos que odian la matemática es enorme, debido a estas dificultades que se arrastran. Para mí, termina siendo un problema serio, porque el poder tener un acceso al uso productivo del contenido se da en muy pocos casos y termina siendo un tema casi de corte social que es muy profundo. Sin embargo, hay investigadores que están trabajando sobre el problema. El Dr. Robert (Bob) Moses, que trabaja en Estados Unidos, está desarrollando un proyecto de enseñanza del álgebra, en el que se postula que si los estudiantes pueden superar las dificultades iniciales, tendrán otro tipo de recursos ante la vida y sus perspectivas de desarrollo social se acrecentarán. Este autor, activista por los derechos civiles, ve el tema del acceso al álgebra como un tema de derechos civiles. Plantea que, sin una preocupación para resolver este problema, básicamente se les está negando a los niños la posibilidad de acceder a todos estos saberes. Sucede que en Estados Unidos, el chico que no sabe álgebra en el secundario, tiene muy restringido el acceso a una educación superior. En resumen, el autor sostiene que hay que repensar profundamente la enseñanza de la matemática en los grados iniciales...



Foto: B. Brizuela

**Figura 4: Enseñando y aprendiendo álgebra en salones de tercer grado en escuelas públicas de Boston, Estados Unidos.**

de la enseñanza de la matemática, incluso para las ciencias sociales.

**DLP:** Hemos charlado un largo rato de los problemas. ¿Podemos hablar de soluciones? ¿Qué se hace, o qué se puede hacer, para cambiar la forma de enseñanza de la matemática?

**BB:** Se está trabajando y mucho.

El tema es que, durante más de veinte años, se han documentado las dificultades a nivel secundario. La gran mayoría de las propuestas se centraron en cambiar ese ámbito. Si las dificultades se hacen aparentes allí, pues se opera allí. Ésta, la del álgebra temprana, es otra mirada. Es decir: bueno, no está funcionando, pensemos qué está pasando antes de la escuela secundaria...

**DLP:** ¿Cómo se puede traducir esta nueva visión en la modificación de programas, currícula o prácticas?

**BB:** Creo que tiene que haber un cambio muy importante en la formación docente. No es un problema personal o de capacidad del docente. Es más bien cómo se conceptualiza desde el principio la tarea, qué significa "enseñar matemática", y ésta es una postura que genera intensos debates. En poco tiempo más comenzaremos a desarrollar una especialización en matemática para docentes de la escuela primaria en Estados Unidos. En la universidad en la que trabajo (Tufts University) había hasta ahora una concepción del docente de primaria como maestro generalista. Creo que pasa acá también, así como en la mayoría de los países, en los que se le pide al maestro que "sepa todo". Nadie puede saber todo, entonces terminan sabiendo "un poquito" de todo.

Nuestro proyecto en el departamento de educación en Tufts University es poder aprovechar las instancias institucionales de formación continua para ir desarrollando especializaciones en diferentes disciplinas para los maestros de primaria, entre ellas, una especialización en matemática. La especialización en ciencias ya existe (se la puede consultar en: <http://ase.tufts.edu/education/programs/research/MSTema.asp>). Este tipo

**VM:** Desde hace veinte años, en Argentina, asistimos a un fenómeno recurrente: cada vez hay menos estudiantes de ciencias matemáticas, físicas y químicas, justamente porque no terminan el secundario. Una de las mayores trabas es la matemática. Creo que lo que está sucediendo es que casi no se está enseñando matemática en el sentido del pensamiento matemático, en lo que realmente es epistemológicamente matemático. La enseñanza se restringe a operar con números... Realmente creo que es un debate que debe darse en nuestra sociedad: ¿queremos que los ciudadanos o los estudiantes puedan y sepan pensar matemáticamente? Quienes no cuentan con esta capacidad sufren discriminación, quedando afuera del real acceso al conocimiento.

**DLP:** También podría discutirse que la forma en que los chicos "piensan matemáticamente" en la vida cotidiana tiene otra complejidad que el uso escolar. ¿Cómo ves, Bárbara, este aspecto?

**BB:** Esto nos lleva también a la relación entre el aprendizaje escolar y la vida cotidiana. Finalmente, parecen resultar prácticas escolares artificiales si se quiere. Otra cuestión relacionada con la forma de enseñar matemática en la escuela, que resulta en una atomización artificial porque no responde a lo que es la matemática, para mí es una transposición didáctica totalmente tergiversada. El acceso a una matemática más compleja tiene numerosos efectos secundarios muy positivos aún en otras disciplinas. La posibilidad de crear modelos para mostrar situaciones es algo que después se aplica en otras ciencias como física, química, biología. Realmente es necesario pensar acerca de qué herramientas estoy construyendo como docente a través

de especializaciones permitirá que quien quiera ser maestro generalista trabaje en ese ámbito, pero quien quiera abocarse a una formación particular o específica cuente con las herramientas adecuadas, ya sea en matemática o en ciencias naturales o sociales. Puede ser útil aclarar que las licencias, o habilitaciones profesionales, de maestros en Massachusetts, el estado en el cual se encuentra Tufts University, caducan luego de cinco años. Después de esta licencia inicial, los maestros deben postularse para una licencia profesional, que requiere un título de posgrado, cursos adicionales si el maestro ya tiene un título de posgrado, y horas de práctica supervisada en el salón de clases.

**DLP:** ¿Cuál es entonces el espíritu de este proyecto?

**BB:** Nos hemos propuesto repensar la matemática desde los grados iniciales de primaria, teniendo en cuenta que los chicos pueden aprender esos conocimientos. Para eso hay que analizar y proponer nuevas actividades que deberían integrarse en el aula. Es simplemente proveer una nueva mirada a la enseñanza de la matemática y dar posibilidades a todos los docentes que quieran profundizar en el tema. Para esto, hemos puesto a disposición todas las actividades en la web para que se usen, se estudien, se prueben... Ahora estamos abocados a repensar también el tema de la formación docente. Es muy fácil enunciar la idea de formar maestros especializados en matemática para primaria, pero el desafío es encontrar la forma de hacerlo, cuál es el currículo, qué cursos deben tomar, entre otros...

**DLP:** ¿Los niños de grados iniciales de primaria son parecidos en todos los lugares?

**BB:** Yo veo más similitudes que diferencias a la hora de sentarnos a hablar con chicos de más o menos la misma edad y un contexto social más o menos similar, con lo cual chicos de padres profesionales de Estados Unidos seguramente son muy similares a chicos con padres profesionales de Argentina, España o México.

**DLP:** Lo que puede variar muchísimo es un chico que ha participado en un proyecto como el que cuenta Bárbara y uno que no ha tenido esa experiencia. Creo que las diferencias son abismales, se notan incluso en los videos que se han visto durante el curso y la diferencia de actitudes y respuestas es sorprendente.

**BB:** Nos ha pasado que la gente que mira esos videos no puede creer que los chicos tengan esa edad.

**DLP:** A modo de cierre, Bárbara, ¿cuál es la perspectiva de trabajo de ahora en más?

**BB:** Los asistentes al curso que dictamos aquí en el CRUB han puesto en práctica las actividades propuestas y han documentado los resultados. Eso es muy importante. Hemos abierto un espacio en nuestra pá-

gina web donde éstos son los primeros ejemplos para que de a poco se vaya construyendo un grupo o foro para otros maestros que quieran contar cómo fue la implementación de la experiencia de la enseñanza del álgebra temprana. Esto es interesante porque muchos maestros, cuando nos escuchan, creen que sólo los investigadores pueden desarrollar estas experiencias, porque cuentan con mayor formación y recursos. La idea es mostrar que docentes "como uno" pueden llevar adelante la idea, incluso en sus clases diarias, sin problemas. De hecho, acá mismo, en Bariloche, hay maestros, profesores de enseñanza media e incluso alumnos del Profesorado en Matemáticas del CRUB que, a partir del curso que hemos desarrollado en estos dos meses, han comenzado a implementar esta propuesta en sus lugares de trabajo, con un buen resultado.

---

## Glosario

---

**Pensamiento formal:** El pensamiento formal se corresponde con el último de los estadios identificados por el psicólogo, biólogo y epistemólogo suizo Jean Piaget (1896-1980), el correspondiente a las operaciones formales. Por lo general, esta etapa corresponde a los alumnos adolescentes y a la edad adulta. Este tipo de pensamiento se caracteriza por los siguientes enfoques y estrategias para abordar los problemas y tareas: lo real se concibe como un subconjunto de lo posible; la capacidad para comprobar hipótesis mediante las deducciones correspondientes con varias hipótesis a la vez, de manera simultánea o sucesiva; y la capacidad de convertir datos en proposiciones y de actuar sobre ellas.

**Transposición didáctica:** La transposición didáctica es el proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables.

---

## Lecturas sugeridas

*Early Algebra, Early Mathematics.* En URL: [www.earlyalgebra.org](http://www.earlyalgebra.org)

*The Algebra Project.* En URL: [www.algebra.org](http://www.algebra.org)