

APORTES «REALISTAS» A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Una propuesta para repensar la enseñanza de la matemática desde el enfoque didáctico de la educación matemática realista.

María Fernanda Gallego y Silvia G. Pérez

El Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática es un grupo de estudio, investigación y difusión de las ideas y propuestas de la educación matemática realista (EMR). Esta corriente didáctica se basa en la filosofía de Hans Freudenthal (1905–1990), matemático y educador de origen alemán que desarrolló la mayor parte de su trabajo en Holanda. Si bien fue reconocido en su época por sus aportes como matemático, actualmente se lo conoce como uno de los educadores matemáticos más influyentes.

Las ideas de Freudenthal sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática se apoyan en una filosofía pragmática, aunque distante de una mirada meramente instrumental de la misma, al considerar que la formación de actitudes matemáticas desempeña un papel relevante en ese proceso. Con una amplia visión ontológica, epistemológica y metodológica de esta ciencia, define la matemática como un proceso, una actividad humana de estructuración u organización, de *matematización* que parte de la experiencia (no limitada a lo estrictamente sensorial) y de la acción del alumno. Al mismo tiempo, esta actividad, que está po-

tencialmente al alcance de todos los seres humanos, produce como resultado conocimiento matemático. De aquí se desprende que una idea central, quizás la más importante de la EMR, es que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con el mundo real, debe estar cerca de los alumnos y ser relevante para la sociedad a fin de constituirse en un valor humano.

Las contribuciones teórico-conceptuales de Freudenthal, fundamentalmente en relación con el valor de los contextos como punto de partida de la actividad matemática de los estudiantes, están vigentes hoy en numerosos enfoques teóricos, en programas internacionales de evaluación (como el PISA, que mide las competencias científicas, lectoras y matemáticas de estudiantes de 15 años de 57 países, y en cuyo marco teórico están explícitas sus ideas) y diseños curriculares de varios y diversos países. Sus aportes surgieron en la década del 60 como oposición firme y crítica a las corrientes pedagógico-didácticas de la época: los objetivos operacionales, los tests estructurados de evaluación, la investigación educativa estandarizada y la introducción de la matemática "moderna" o "conjuntista" en la escuela.

A partir de un curso y charlas introductorias sobre la EMR dadas en San Carlos de Bariloche en el año 1999, un grupo de docentes reconoció en esta línea un enfoque que les podría brindar herramientas teórico-metodológicas valiosas para resolver ciertas dificultades en relación con sus prácticas áulicas en el área. Convocados por el interés de profundizar esta corriente, surge a principios del año 2000 el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM), un grupo de docentes de diferentes niveles educativos (inicial, primario, secundario y superior) que participan voluntariamente. La heterogeneidad del grupo está dada por los recorridos de formación y capacitación disciplinar y didáctica de sus integrantes, el tipo de instituciones en las que se desempeñan, los estudiantes con los que trabajan, y los años de experiencia docente.

Desde sus comienzos, el grupo se reúne regularmente, desarrollando el trabajo en distintas etapas: el uso de secuencias didácticas y materiales elaborados

Palabras clave: educación matemática realista, didáctica, experiencias de aula.

María Fernanda Gallego ^(1,2)

Prof. en Matemática y Cosmografía.
marfergallego@gmail.com

Silvia G. Pérez ^(1,2)

Prof. para la Enseñanza Primaria,
perezdaq@gmail.com

⁽¹⁾ Coordinadoras del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática.

⁽²⁾ Instituto de Formación Docente Continua de Bariloche.

desde la línea de la EMR, su adaptación a las realidades particulares de cada grupo de estudiantes y, finalmente, la elaboración de propuestas propias.

El GPDM se constituyó entonces con un perfil de docentes en formación permanente, caracterizándose por una actitud abierta de preparación y estudio constantes para dar respuestas actualizadas y acordes a las situaciones propias de la vida profesional y personal.

¿Qué es la educación matemática realista?

La EMR es una teoría global que aporta una serie de herramientas conceptuales generales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela, y un conjunto de teorías locales específicas para distintos temas (números y operaciones, geometría, etc.), desarrolladas por su fundador y otros integrantes del Instituto Freudenthal. La contribución de esta perspectiva, que está en permanente construcción, revisión y expansión, se orienta al desarrollo, la investigación y la difusión de materiales curriculares y de evaluación.

Las ideas nodales que sustentan esta corriente didáctica son las siguientes:

a. La matemática como actividad humana de organización del mundo social, natural y también, matemático, llamada matematización. De aquí se desprende la premisa de una matemática para todos, al alcance de todos los seres humanos.

b. Desde el punto de vista didáctico, es decir del aprendizaje y la enseñanza, esta actividad de matematización se traduce en reinención guiada por el docente. Esto implica que la enseñanza debe ofrecer a los alumnos la oportunidad de reinventar las ideas y herramientas matemáticas a partir de matematizar situaciones problemáticas contextualizadas, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente. De este modo, el foco de la educación matemática no se encuentra en la matemática como un sistema cerrado, sino en la actividad de matematización.

c. Desde el punto de vista del diseño curricular, esta actividad de matematización bajo la forma de reinención guiada, necesita de la *fenomenología didáctica*. Esta metodología de investigación consiste en la búsqueda de aquellos fenómenos, usos o manifestaciones de la vida real (contextos y situaciones) en los que un tema u objeto matemático aparece o se aplica naturalmente. Este análisis fenomenológico-didáctico permite poner de manifiesto las aplicaciones matemáticas a enseñar e identificar puntos de anclaje que den lugar al proceso de matematización, posibilitando además la búsqueda y el diseño de situaciones organizadas en trayectorias o secuencias, y la construcción de una teoría local para la enseñanza de ese tema. Las dos fuentes que nutren la fenomenología didáctica son la historia de la matemática y las producciones y cons-

trucciones de los estudiantes que surgen durante este proceso de reinención.

Desde la perspectiva de la EMR, el currículo es concebido como un proceso que demanda el diseño de trayectorias o secuencias de aprendizaje-enseñanza que den lugar a cambios concretos en la enseñanza matemática en el aula. Impulsora de estos cambios es la investigación para el desarrollo, metodología que tiene por objeto la observación, el registro de hitos o puntos de referencia y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos que serán analizados en equipo para mejorar los materiales de enseñanza en un proceso de ida y vuelta entre las trayectorias planificadas y su implementación. La investigación para el desarrollo es una combinación de diseño curricular e investigación educativa, en la que la elaboración de actividades de enseñanza es un medio para explicar, elaborar, evaluar, ajustar y ampliar una teoría de enseñanza. Este tipo de investigación apunta a hacer evidente el proceso de diseño curricular y a explicarlo a través de la reflexión conjunta entre investigadores y docentes. Los resultados de lo que sucede en el aula al aplicar aquello que fue diseñado provisoria e hipotéticamente por el diseñador curricular, retroalimentan la continuación del trabajo en un proceso cíclico de discusión y testeo, y dan lugar a un producto teórico y empíricamente fundamentado que puede servir a otros docentes como marco de referencia para fundamentar sus propias decisiones.

En el seno del GPDM se han realizado variadas experiencias, incluyendo planificación conjunta, observaciones de clases y análisis de registros, producciones de estudiantes y narrativas de docentes, dando lugar a la elaboración de materiales curriculares, publicaciones y comunicaciones científicas.

Los principios fundamentales de la educación matemática realista en acción en el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática

Las ideas de Freudenthal constituyen la filosofía de la educación matemática realista, que puede resumirse en seis ideas fundantes, abarcando aspectos tanto del aprendizaje como de la enseñanza. Estas ideas, que se conocen como *los principios* de la EMR, se sintetizan en:

1) *Principio de realidad*: Para enseñar a matematizar, es necesario involucrar a los alumnos en actividades de organización de situaciones problemáticas en contextos realistas que promuevan el uso de sus conocimientos informales, su experiencia y su sentido común. Cabe subrayar que el término realista no se limita a lo estrictamente real o propio del mundo físico, sino a todo aquello que es imaginable, representable o que tiene sentido para los estudiantes.

Un contexto es rico en tanto provoca el proceso de matematización, dando lugar a una multiplicidad de situaciones problemáticas.

Los contextos pueden surgir tanto de experiencias de la vida cotidiana, como del mundo mental o incluso de la matemática misma. Estos contextos se constituyen tanto en puntos de partida como en dominios de aplicación de la actividad matemática. Asimismo, que un contexto sea o no realista depende de la experiencia de los alumnos y de su capacidad de imaginarlo o representarlo.

La tarea inicial en el GPDM fue estudiar el impacto de contextos realistas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para ello se adaptaron y utilizaron secuencias didácticas de esta línea, discutiendo colectivamente estas experiencias en la búsqueda y reconocimiento de buenos contextos, sin dejar de considerar el carácter relativo de los mismos según las características del grupo de estudiantes.

A modo de ejemplo, presentamos contextos usados por docentes del grupo en el nivel primario para invitar a los estudiantes a matematizar, e ilustramos la participación de los niños con algunos comentarios y producciones gráficas surgidas durante la realización de las actividades.

Los collares con distinta cantidad, disposición y color de bolitas son un contexto rico, significativo y matematizable, que suele ser adoptado por la EMR para trabajar regularidades aritméticas. Alumnos de segundo grado abordaron contenidos relacionados con la codificación de patrones de repetición (secuencias de bolitas o cuentas que se construyen siguiendo una regla, con un núcleo que se repite), multiplicación, divisores y múltiplos de un número y escalas numéricas a partir de los mismos. Los alumnos trabajaron grupalmente diseñando, armando y representando collares con distinto número de bolitas. Después de jugar con diferentes collares descubriendo las regularidades en cada uno de ellos y de analizar los tipos de patrones (completo o incompleto), se les pidió:

a) Diseñar un collar que tuviera 20 bolitas (ver Figura 1).

Los alumnos dieron cuenta de la posibilidad o imposibilidad de completar un collar de 20, con un núcleo de 2, 5 o 3 bolitas, expresando:

- No se puede hacer 2-1, porque te queda incompleto. Mirá. Tenemos 2 y (refiriéndose al núcleo de su patrón), vamos 3, después 2 y 1, ya vamos 6, y 2 y 1 más 9... (así explica hasta llegar a 18)... llegamos a 18 y necesito 3 más para tener el patrón completo... ¡Y nos pasamos de 20! Entonces lo hicimos de 2 en 2, con los mismos colores, y así sí nos da



Figura 1. algunos ejemplos de collares a 20 diseñados por los alumnos de segundo grado.

- Sí, alguien eligió 2 amarillas y 3 rojas y probamos, y ¡lo logramos!

b) Diseñar otro collar con 36 bolitas (ver Figura 2)

Esta tarea promueve el avance de los alumnos en el tratamiento matemático de la relación entre la cantidad de bolitas del collar y la cantidad del núcleo a través de la multiplicación:

- Éste. 9 amarillas, 9 negras. Tiene 36 bolitas porque 9 veces 4 es 36.

- Lo estamos haciendo de 3 en 3.

- ¿Alguien se acuerda cuántas veces había que repetir un núcleo de 6 bolitas para llegar a 36?

- 6, porque 6×6 es 36.

- Con 11 no se puede porque llegás a 33 y si le agregás 11 más te da 44 y nos pasamos.

- Con 8 no se puede, sería 32.

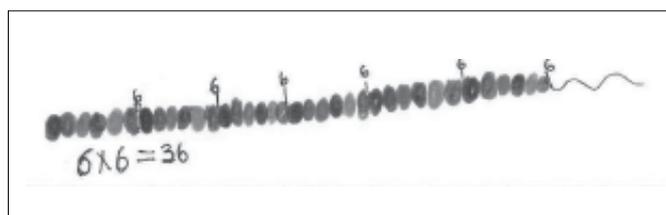


Figura 2. diseño de un collar posible de 36 bolitas.

Ante el requerimiento de expresar por escrito estos descubrimientos, los alumnos produjeron notaciones espontáneas (en clase, inicialmente se respetan todas las escrituras a pesar de errores en el uso del signo igual):

-Hicimos 3 veces 12 es igual a 36. $12+12+12=36$.

y sentido común, interpretan y organizan matemáticamente la situación. Este proceso se denomina *matematización horizontal*.

En el nivel referencial se inicia el proceso de *matematización vertical*, entendido como el análisis y la reflexión dentro de la matemática misma. Siempre y todavía en referencia a la situación particular dada, los estudiantes elaboran representaciones o modelos (concretos, gráficos, notacionales), descripciones, procedimientos personales y conceptos que esquematizan el problema, es decir, surgen “modelos de” la situación dada.

Continuando el proceso de *matematización vertical* iniciado, en el nivel general priman la exploración, reflexión y generalización de lo producido en el nivel anterior. El énfasis está en la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, modelos y estrategias utilizados por los alumnos para superar el contexto de referencia que les dio origen y profundizar los aspectos matemáticos a fin de generalizarlos. Esto permitirá a los estudiantes usarlos y reconocerlos como “modelos para” resolver problemas análogos.

En el último nivel, el formal, el trabajo se focaliza en el uso comprensivo de los conceptos, procedimientos estándares y notaciones convencionales, propios de la matemática.

Un ejemplo desarrollado en cuarto año de la escuela primaria muestra cómo los alumnos trabajaron a distintos niveles de *matematización* al resolver el siguiente problema de multiplicación: “Cada mesa de invitados lleva 6 guirnaldas. Son 29 mesas, ¿cuántas guirnaldas debo comprar?”.

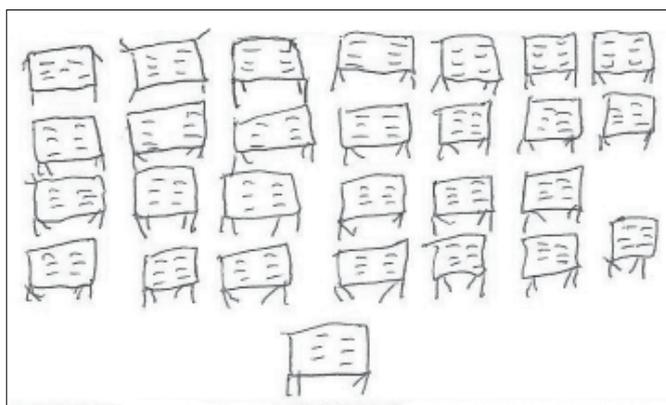


Figura 4. resolución gráfica ligada al contexto del problema (dibujo de mesas y guirnaldas).

Las producciones contemplan desde el uso de dibujos estrechamente conectados al contexto del problema (ver Figura 4) hasta la expresión matemática formal de la multiplicación (ver Figura 5), pasando por otras escrituras relacionadas con la suma reiterada del 6 o del 29, algunas más eficientes y económicas que otras (ver Figuras 6 y 7).

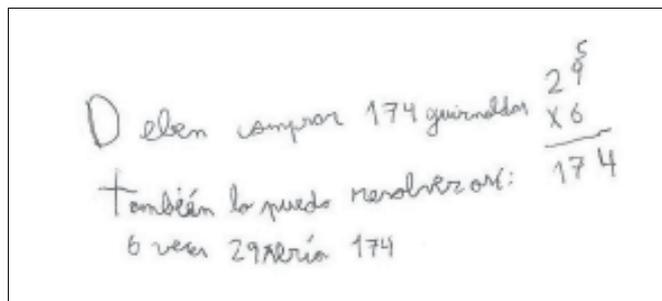


Figura 5. resolución simbólica formal (uso del algoritmo tradicional de multiplicar).

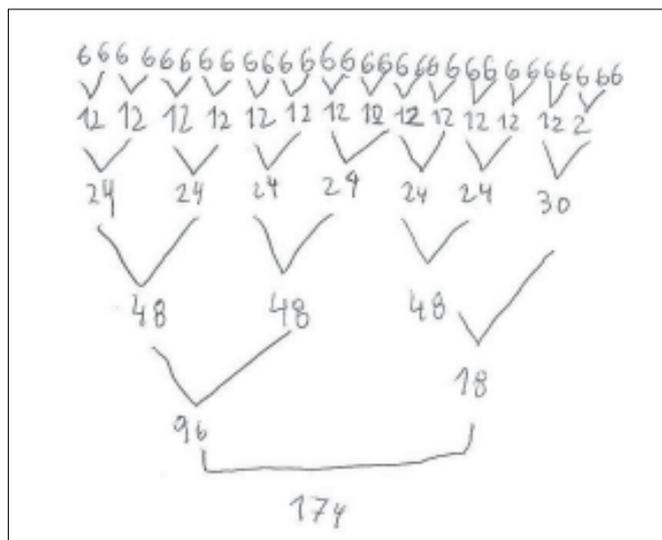


Figura 6. resolución numérica basada en la suma reiterada del 6 (29 veces).

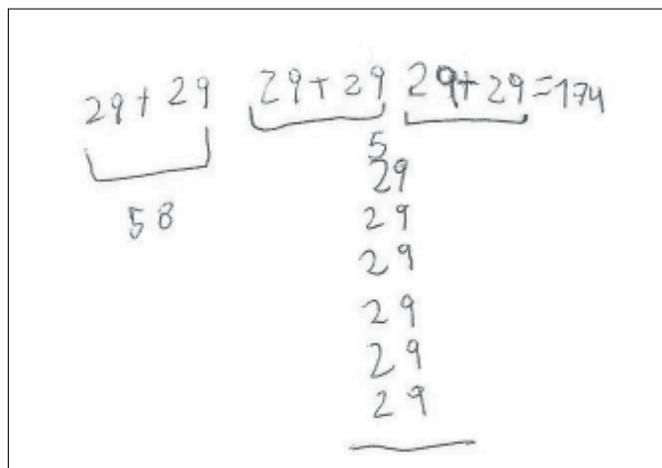


Figura 7. resolución numérica basada en la suma reiterada del 29 (6 veces).

El pasaje de un nivel a otro de *matematización* se apoya en modelos, entendidos como herramientas de organización y representación de las situaciones que ponen de manifiesto los aspectos matemáticos esenciales de las mismas. En la EMR, el término *modelo* dista de la concepción de modelo matemático (producto pre-constituido de la matemática formal); y considera tanto aquellos modelos que emergen de la acti-

vidad matematizadora de los alumnos como aquellos que el docente propone, conectados con las estrategias informales de los estudiantes o tomados de la historia de la matemática, pero que no se imponen y deben ser lo suficientemente próximos a los alumnos para ser adoptados naturalmente por ellos.

Entre los modelos de la EMR se destacan: materiales didácticos manipulables (como contadores, dine-

ro, collares para trabajar números y operaciones), situaciones "paradigmáticas", como subir y bajar pasajeros durante el recorrido del colectivo, que permite trabajar simultáneamente con los significados de las operaciones de suma y resta, o la fábrica de caramelos en la que los mismos se empaquetan de a 10 y se arman cajas (de 10 paquetes o 100 caramelos) para abordar las propiedades del sistema decimal; esquemas notacionales (como la tabla de razones, un patrón visual de filas y columnas que conecta dos magnitudes de forma proporcional y permite generar razones equivalentes) y procedimientos simbólicos (como los algoritmos y las fórmulas). Ellos permiten conectar los conocimientos informales de los alumnos con los propios de la matemática formal, en tanto estén arraigados en contextos realistas y sean lo suficientemente flexibles para ser aplicados en un nivel superior. Esto implica que un modelo debe apoyar la matematización vertical, sin impedir la vuelta a la situación original que le dio sentido.

Un modelo ampliamente trabajado por los docentes del GPDM en distintos años de la escuela primaria es la tabla de razones, que admite el uso de estrategias de distinto nivel, según los medios disponibles de cada uno. Por otra parte, un mismo problema puede resolverse usando diferentes modelos que comparten los aspectos matemáticos esenciales del contenido implicado (ver Figura 8).

El uso de contextos realistas y de modelos emergentes y la reflexión sobre los mismos en situaciones de interacción son indispensables para alentar el avance en el nivel de matematización. Esto último nos posibilita la vinculación con el siguiente principio.

4) *Principio de interacción*: Las interacciones verticales (docente-alumno) y horizontales (entre alumnos) tienen un lugar central en el aula, en tanto posibilitan la reflexión que ayuda a los alumnos a alcanzar mayores niveles de comprensión matemática. El trabajo en grupos heterogéneos (con alumnos de distinto nivel de habilidad y destreza matemática), con la guía de un docente hábil puede maximizar las oportunidades para generar o producir, intercambiar y apropiarse de ideas y facilitar el proceso de reinención ya mencionado.

Los alumnos son convocados a accionar y reflexionar: resuelven problemas matemáticos, formulan por sí mismos otros, proponen, comparten, contrastan, justifican y evalúan ideas y herramientas matemáticas, utilizan diagramas, simbolizan y establecen relaciones matemáticas en momentos de trabajo individual, grupal y colectivo.

En el GPDM se están llevando a cabo trabajos en torno a cómo el discurso en el aula puede tomar la forma de "pensar juntos en voz alta". Esto implica que la conversación en torno a las ideas que surgen en la resolución de un problema dado se da no sólo al final, sino a lo largo de todo el proceso. Para comprender y

Un electricista necesita 730 metros de cable para hacer la instalación eléctrica de un edificio. El cable se vende en carreteles de 48 metros. ¿Cuántos carreteles necesita comprar para hacer su trabajo?

Alberto

carretel	1	10	11	12	13	14
cant. de m	48	480	528	576	624	672

Valentina

Carretel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cant. de m	48	96	144	192	240	288	336	384	432
Carretel	10	11	12	14	15	16			
Cant. de m	480	528	576	672	720	768			

Teo contestó correctamente 27 de las 40 preguntas de su prueba final. Si para pasar de grado necesita responder el 60% de las preguntas correctamente, ¿habrá pasado de grado?

Luxecia

Nº	40	4	8	16	24	
%	100	10	20	40	60	

Norberto

Pablo

	0,5%	1%	25%	50%	62,75%	75%	100%
	21	40	20	25	30	40	

Si, teo aprobó con el 62,75%

Figura 8. ejemplos de distintos usos para un mismo modelo (tabla de razones) y de uso de modelos distintos para un mismo problema..

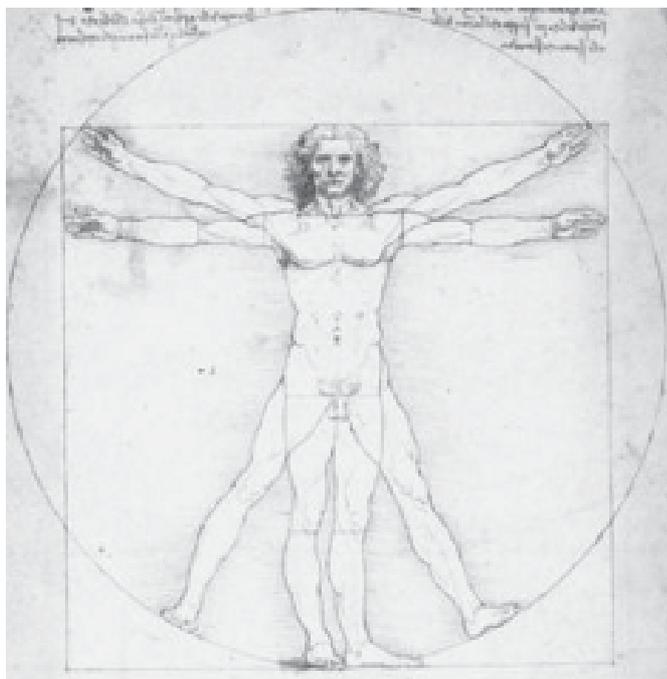


Figura 9. El Hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci.

desentrañar cómo se realizan los significados matemáticos en estas situaciones de interacción social, se apela a otras corrientes teóricas y disciplinares de la pedagogía (como la generada por Dewey), de la psicología (el enfoque sociocultural del desarrollo propuesto por Vigotsky) y de la lingüística (los aportes de Halliday). A través del análisis léxico-gramatical de registros de clase a cargo de docentes del GPDM, se estudian y muestran cómo las conversaciones y las contribuciones del docente y de los alumnos inciden sobre la realización, el intercambio y la apropiación de significados matemáticos acerca de los problemas en cuestión.

La habilidad desarrollada por los docentes para guiar los intercambios que apoyen la apropiación de ideas permite que todas las situaciones de interacción que se presentan en una clase se aprovechen para la reflexión y el avance en el nivel de matematización (y no sólo las clásicas “puestas en común” que se plantean al final del proceso de resolución de problemas).

5) *Principio de interconexión:* A partir del uso de contextos ricos, surge la necesidad de integrar distintos ejes de la matemática, evitando el tratamiento aislado de los temas, y promoviendo el uso de un amplio y variado rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La interrelación o entrecruzamiento de esta disciplina con otras se ve alentada por la selección de “buenos” problemas, es decir, de aquellos que son accesibles a todos los alumnos, ofrecen distintos niveles de desafío, admiten diferentes estrategias de resolución y estimulan la creatividad, entre otras características.



Figura 10. Los alumnos de 5º año tomaron medidas de distintas partes de su cuerpo

Esta interconexión debería producirse tan pronto y fuertemente como sea posible, para dar mayor coherencia a la enseñanza y posibilitar distintos modos de matematizar estas situaciones, respetando la diversidad cultural y cognitiva de los alumnos.

Presentamos a continuación un ejemplo que da cuenta de cómo un problema en contexto facilita naturalmente esta interconexión temática.

En el marco de un proyecto escolar de nivel primario de Educación Artística, la docente de quinto año de la escuela primaria abordó el tema *proporcionalidad* a partir de los estudios de Leonardo da Vinci sobre el hombre de Vitruvio, una representación de la figura humana con notas anatómicas, realizada alrededor del año 1490 (ver Figura 9).

Los alumnos buscaron las relaciones entre las distintas partes de su propio cuerpo, comprobando las mismas en el dibujo de Leonardo da Vinci. Luego, al diseñar su propia versión de esta obra, no sólo usaron las relaciones de proporcionalidad encontradas sino también, midieron longitudes y ángulos, efectuaron cálculos, dibujaron figuras usando instrumentos geométricos y reflexionaron sobre el proceso de medir (ver Figura 10). Así, abordaron integradamente contenidos provenientes de distintos ejes de la matemática. La Figura 11 muestra algunas producciones que hicieron los alumnos al finalizar esta secuencia:

El conjunto de ejemplos expuestos en estas páginas permite comprender lo que Freudenthal denominó *didactización*. Así como la actividad principal de los alumnos es la de matematizar, la de los docentes es la de *didactizar*, entendida como la actividad organizadora de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje. La didactización se da tanto a nivel horizontal como vertical. En su forma horizontal, los docentes actúan, observan y se auto-observan en el aula explicando sus propias prácticas (y las de otros). A nivel vertical, re-

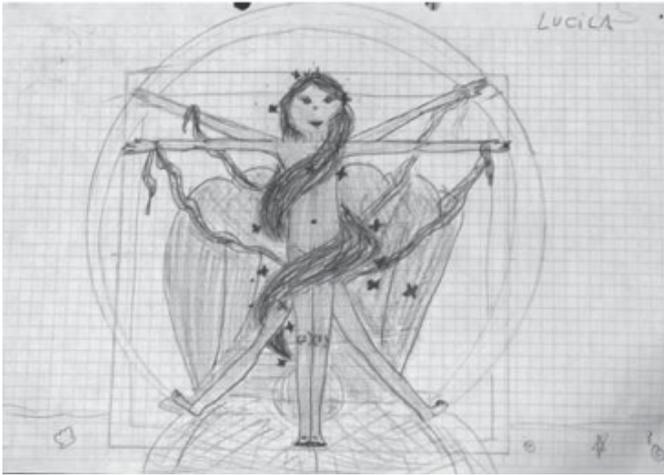


Figura 11. Algunas versiones de los alumnos de 5º año de su Hombre de Vitruvio.



flexionan, elaboran y formalizan sus propias herramientas didácticas para facilitar el proceso de matematización de los estudiantes. Las teorías desempeñan un papel importante en este proceso de didactización vertical. Este proceso se estructura a partir de la matematización progresiva de los alumnos, por lo que los docentes, tal como lo hicimos en el GPDM, necesitan oportunidad para experimentar este proceso.

Además de esta actividad central de los docentes, en el grupo nos involucramos en la resolución conjunta de problemas no rutinarios. Se trata de aquellas situaciones problemáticas que ponen en evidencia los procesos de matematización de los alumnos, ya que exigen el uso de habilidades cognitivas de mayor nivel, instan al análisis y la interpretación y favorecen el proceso de modelización (dado que no admiten un método directo de solución sino que demandan adaptar, combinar o inventar estrategias). El trabajo a distintos niveles de matematización permitió aprovechar la heterogeneidad del grupo promoviendo situaciones de intercambio que contribuyeron a la valoración mutua entre los integrantes y al enriquecimiento matemático y didáctico de todos.

La puesta en acción de los principios fundantes de la EMR se llevó entonces a cabo a través del compromiso y el trabajo activo de los docentes del GPDM, quienes en un clima de confianza y respeto nos implicamos en actividades tanto de matematización como de didactización.

Con más de una década de trabajo, el GPDM continúa la tarea de difusión del enfoque de la EMR a través de cursos y talleres, seminarios, congresos, publicaciones y asesoramiento educativo.

Las autoras agradecen la lectura crítica realizada por la Prof. Ana Bressan a este texto.

Lecturas sugeridas

- Bressan, A. y Zolkower, B. (2012). Educación matemática realista. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 175-200). Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento y Editorial Universitaria Villa María.
- Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Curriculum Studies*, 32 (6), 777-796. Traducción al castellano de N. Saggese, F. Gallego y A. Bressan disponible en URL: www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: Un recorrido guiado. *Correo del Maestro*, 149, 26. En URL: www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm