Cuadernos de Investigación. Serie Administración. ISSN 2683-9652
http://revele.uncoma.edu.ar/htdoc/revele/index.php/administracion Número 4 (2022)

Introducción a los Modelos de Valuación de Opciones

Eduardo Melinsky[1] / edumel@melpel.com.ar
Universidad de Buenos Aires (UBA)
Universidad Nacional del Comahue (UNComa)
Recibido: 27/12/2022 - Aceptado: 23/03/2023

RESUMEN:

Este trabajo presenta las bases conceptuales de la valuación de opciones, considerando exclusivamente la modalidad "europea", en tiempo discreto y sobre la base del concepto de arbitraje.

Se analizan distintas alternativas de gestión de una opción lanzada, inicialmente con los casos extremos de posiciones abiertas ("descubierta") o cubiertas, con sus correspondientes resultados finales posibles, y finalmente se muestra una posición arbitrada "estática", con resultados finales posibles nulos, que se corresponden con la ecuación de paridad entre opciones de compra, de venta y operaciones financieras ("put-call parity").

Finalmente se presenta las bases conceptuales de los modelos de valuación de opciones, dentro de un concepto de arbitraje "dinámico", desarrollando el denominado modelo dicotómico, y se señalan aspectos relevantes respecto de los modelos de valuación de opciones en general.

Palabras clave: Valuación. Opciones europeas. Opciones de compra. Opciones de venta

Clasificación JEL: G23 Instrumentos financieros.

SUMMARY:

This paper presents the conceptual bases of the valuation of options, considering exclusively the "European" modality, on a discrete-time approach, based on the concept of arbitrage.

Different management alternatives for an issued option are analyzed, initially with the extreme cases of open ("naked") or covered positions, with their corresponding possible final results, and finally a "static" arbitrage position is shown, with null possible final results, which corresponds to the parity equation between call and put options and financial operations ("put-call parity").

Finally, the conceptual bases of option pricing models are presented, within a "dynamic" arbitrage concept, developing the so-called dichotomous model, and relevant aspects regarding option pricing models in general are pointed out.

Keywords: Valuation. European options. Put options. Call options.

JEL Classification: G23 Financial Instruments.

[1] Doctor en Ciencias Económicas con Orientación Ciencias Actuariales, Actuario y Contador Público, Facultad de Ciencias Económicas UBA. Profesor de Gestión Financiera de la Maestría en Gestión Empresaria de UNComa.

1. Introducción:

Con anterioridad a este artículo, hemos presentado trabajos con relación a la caracterización y valuación de productos de "Opción".

En esta ocasión queremos compartir nuestra experiencia docente en el desarrollo del proceso de introducción a los modelos de valuación de opciones desde una óptica centrada en un tratamiento contable, sobre la base de las cotizaciones de los mercados relevantes y atendiendo a los aspectos de interpretación del comportamiento de estos.

Atento a los fines introductorios de este trabajo, sólo se trabaja con opciones que sólo pueden ser ejercidas al vencimiento, lo que habitualmente recibe el nombre de opciones europeas.

Este desarrollo atiende así a aspectos didácticos iniciales del tema, aplicables a la formación de profesionales en ciencias económicas, en forma integrada con tratamientos analíticos de formación superior en la gestión de riesgos e instrumentos financieros derivados.

2. Definiciones:

Consideramos en primer lugar la definición clásica de un contrato de opción:

- Es un contrato por el cual el tomador mediante el pago de la prima adquiere del lanzador el derecho a comprar o a vender un determinado bien subyacente, de acuerdo con condiciones de fecha y de precio establecidos al origen

Así estamos frente Contrato de compraventa de un derecho a título oneroso, para la cuál en esta instancia nos interesan los elementos siguientes:

- Partes: tomador - lanzador
- Precio del contrato: "prima"
- Derecho: Tenemos dos contratos básicos diferenciados que generar al tomador (lanzador) un derecho (obligación), con relación a un determinado bien subyacente, de:
    - Compra (Opción de Compra - "Call")
    - venta (Opción de Venta - "Put")
- Plazo: a fecha fija (Op. "europea"), hasta determinada fecha (Op. "americana")
- Bien subyacente: cosa real o referencial sobre la que se establece un precio de ejercicio de la opción
- Precio de ejercicio de la opción.

También podemos considerar una definición más general tal que

- Es un contrato por el cual el tomador mediante el pago de la prima adquiere del lanzador el derecho a obtener compensaciones que acoten los efectos de la fluctuación de determinadas variables económicas

Siendo las variables económicas o de mercado, por ejemplo, cotizaciones de: tasas de interés, tipos de cambio, mercancías, acciones, bonos, índices bursátiles.

Sobre la base de estas definiciones no centramos en "Opciones Europeas", utilizando la notación siguiente:

a) Elementos contractuales:

- Precio de ejercicio: K

- Plazo: n
- Prima del contrato de Opción de Compra al origen: POC(0,n;K)
- Prima del contrato de Opción de Venta al origen: POV(0,n;K)

b) **Cotizaciones de los Mercados** (se considera al momento "t", entre el origen y el vencimiento de la opción en "n"):

- **Con respecto al bien subyacente**:
  - Al contado; S(t)
  - A término: F(t,n)

- **Con respecto al mercado financiero (libre de riesgo)**:
  - Tasa de interés de la moneda de referencia: i(t,n)
  - Tasa de interés con respecto al bien subyacente: ib(t,n)

- **Con respecto al mercado de opciones**:
  - Prima del contrato de Opción de Compra: POC(t,n;K)
  - Prima del contrato de Opción de Venta: POV(t,n;K)

Al vencimiento de los contratos de opción se tienen los valores finales siguientes tal que al ser un derecho a favor del tomador, los mismos serán positivos o nulos:

- **Valor Final Opción de Compra:**
  - $VFOC[0,n;K] = MAX[0; S(n)-K] = [S(n)-K]_{+}$

- **Valor Final Opción de Venta:**
  - $VFOV(0,n;K) = MAX[0; K-S(n)] = [K-S(n)]+$

Resulta importante destacar que:

- Si $S(n) = K$: $VFOC[0,n;K] = VFOV(0,n;K) = 0$
- Si $S(n) > K$: $VFOC[0,n;K] = S(n) - K > 0$ y $VFOV(0,n;K) = 0$
- Si $S(n) < K$: $VFOC(0,n;K) = 0$ y $VFOV[0,n:K] = K - S(n) > 0$

Sobre la base de estos conceptos procederemos a realizar un análisis teórico practico de la operatoria con opciones, desde el punto de vista de un "Lanzado" con entidad de intermediación financiera y sobre la base de un enfoque contable con su respectiva evolución patrimonial y resultados consecuentes.

3. Planteo Contable – Posición Abierta:

Consideramos el caso de que una entidad financiera provee a un cliente un contrato de opción sobre un determinado bien subyacente, y mantiene la operación dentro de su patrimonio, sin realizar ninguna otra actividad específica para la gestión de la posición lanzadora con la opción (también llamada posición "descubierta").

Se tiene así las actividades iniciales:

a) Lanzamiento de una opción de compra sobre un determinado bien subyacente, carente de mercado financiero de referencia, y con la percepción de la prima. No se computan gastos
b) Inversión del importe de prima en operaciones financieras a tasa de interés de mercado, por el plazo "n", en condiciones de libre de riesgo

De esta manera se tiene conceptualmente el cuadro patrimonial inicial, tal que:

PATRIMONIO INICIAL - momento "0"	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = POC(0,n;K)	Opciones Lanzadas = POC(0,n;K)
	PN(0) = 0

Al vencimiento de la opción, se tiene:

1) Monto alcanzado por la colocación financiera
2) Valor final de la opción de compra, según la cotización al contado del bien subyacente

Se arriba a un Patrimonio Neto final "PN(n)" – sujeto al valor cierto del "monto" y al valor ("ex-post") que resulte del precio del Bien Subyacente, tal que:

PATRIMONIO FINAL - momento "n"	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = POC(0,n;K).[1+i(o,n)]	Opciones Lanzadas = VFOC[0,n;K]
	PN(n) = POC(0,n;K).[1+i(o,n)]- VFOC[0,n;K]

Y, habiendo partido de un patrimonio neto inicial de "0", al vencimiento se tiene un valor de patrimonio neto que puede ser:

A. Si S(n) = K: VFOC[0,n;K] = 0, con PN(n) = 0

B. Si S(n) < K: VFOC(0,n;K) = 0, con PN(n) = POC(0,n;K).[1+i(o,n)]

C. Si S(n) > K: VFOC[0,n;K] = S(n) – K, con PN(n) = POC(0,n;K).[1+i(o,n)] - VFOC[0,n;K]
Con PN(n) >0 si S(n) < POC(0,n;K).[1+i(o,n)] + K

De esta manera la entidad financiera, obtiene:

- un resultado nulo o positivo en A y B,
- mientras que el caso C, el resultado depende de la diferencia entre "S(n)" y "K", tal que si esta diferencia es superior al saldo de inversiones se tiene un resultado negativo, por lo que la entidad está sujeta en definitiva a un riesgo de suba de la cotización de bien subyacente.

A título de ejemplo presentamos:

Ejemplo Base	
Elementos Contractuales	
K =	$ 104,50
n =	1
Elementos del Mercado	
S(0) =	$ 100,00
i(0,n) =	10%
F(n) =	$ 110,00
Primas al Origen	
POC(0,n;K) =	$ 7,00
POV(0,n;K) =	$ 2,00

PATRIMONIO INICIAL - momento "0" - en $			
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	7,00	Opciones Lanzadas	7,00
		PN(0)=	**0,00**

Cuadro de Valores Finales en $		
S(n)	**VFOC[0,n,K]**	**PN(n)**
80,00	0,00	7,70
90,00	0,00	7,70
100,00	0,00	7,70
104,50	0,00	7,70
110,00	5,50	2,20
112,20	7,70	0,00
120,00	15,50	-7,80
130,00	25,50	-17,80
140,00	35,50	-27,80

PATRIMONIO FINAL - momento “n” - en $			
	S(n) =	**80,00**	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	7,70	Opciones Lanzadas	0,00
		PN(0)=	**7,70**

PATRIMONIO FINAL - momento “n” - en $			
	S(n) =	**140,00**	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	7,70	Opciones Lanzadas	35,50
		PN(0)=	**-27,80**

4. Planteo Contable – Posición Cubierta:

Ahora pasamos de una posición “abierta” o “descubierta”, complementando a las operaciones anteriores con la compra de una unidad del bien subyacente. De esta manera, consideramos el caso de que una entidad financiera provee a un cliente un contrato de opción sobre un determinado bien subyacente, mantiene la operación dentro de su patrimonio, pero adquiriendo una unidad de bien subyacente, utilizando para ello recursos financieros adicionales al importe de prima cobrada con un costo igual a la tasa de interés señalada, y realizar ninguna otra actividad específica para la gestión de la posición lanzadora con la opción.

Se tiene así las actividades iniciales:

a) Lanzamiento de una opción de compra sobre un determinado bien subyacente, carente de mercado financiero de referencia, y con la percepción de la prima. No se computan gastos
b) Compra de una unidad de bien con precio “S(0)”
c) Financiación de la operación a tasa de interés de mercado, por el plazo “n”, en condiciones de libre de riesgo

De esta manera:

PATRIMONIO INICIAL - momento “0”	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = S(0)	Opciones Lanzadas = POC(0,n;K)
	Financiamiento = S(0) - POC(0,n;K)
	PN(0) = 0

Al vencimiento de la opción, se tiene:

1) Valor Alcanzado por el Bien Subyacente – “S(n)” -
2) Valor final de la opción de compra, según la cotización al contado del bien subyacente
3) Monto alcanzado por el financiamiento

Luego,

PATRIMONIO FINAL - momento “n”	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = S(n)	Opciones Lanzadas = VFOC[0,n;K]
	Financiamiento = [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]

	PN(0) = S(n) - VFOC[0,n;K] - [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]

Así, habiendo partido de un patrimonio neto inicial de "0", al vencimiento se tiene un valor de patrimonio neto que puede ser:

A. Si S(n) = K: VFOC[0,n;K] = 0, y PN(n) = K - [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]

B. Si S(n) < K: VFOC(0,n;K) = 0, y PN(n) = S(n) - [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]
Con PN(n) < 0 si S(n) < [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]

C. Si S(n) > K: VFOC[0,n;K] = S(n) – K, y PN(n) = K - [S(0) - POC(0,n;K)].[1+i(o,n)]

En este caso la entidad está sujeta, en definitiva, a un riesgo de baja de la cotización de bien subyacente. Lo que vemos a continuación.

De conformidad con el ejemplo anterior se tiene:

PATRIMONIO INICIAL - momento "0" - en $			
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	100,00	Opciones Lanzadas	7,00
		Finaanciamiento	93,00
		PN(0)=	**0,00**

Cuadro de Valores Finales en $			
S(n)	**VFOC[0,n,K]**	**Financiamiento**	**PN(n)**
80,00	0,00	102,30	-22,30
90,00	0,00	102,30	-12,30
100,00	0,00	102,30	-2,30
102,30	0,00	102,30	0,00
104,50	0,00	102,30	2,20
110,00	5,50	102,30	2,20
120,00	15,50	102,30	2,20
130,00	25,50	102,30	2,20
140,00	35,50	102,30	2,20

PATRIMONIO FINAL - momento "n" - en $			
	S(n) =	**80,00**	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	80,00	Opciones Lanzadas	0,00
		Financiamiento	102,30
		PN(0)=	**-22,30**

PATRIMONIO FINAL - momento "n" - en $			
	S(n) =	**140,00**	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	140,00	Opciones Lanzadas	35,50
		Financiamiento	102,30
		PN(0)=	**2,20**

5. Planteo Contable – Posición Arbitrada:

Hemos visto que en la posición cubierta subsiste para la entidad financiera un riesgo por baja de la cotización (es decir valores de “S(n)” por debajo de “K”), y de esta manera incorporamos a la posición cubierta, la toma de una opción de venta, que permita compensar respecto de “K” el menor valor que tome este bien respecto de este precio de ejercicio.

Consecuentemente se tienen las actividades iniciales siguientes:

a) Lanzamiento de una opción de compra sobre un determinado bien subyacente, carente de mercado financiero de referencia, y con la percepción de la prima. No se computan gastos
b) Compra de una unidad de bien con precio “S(0)”
c) Adquisición (posición tomadora) de una Opción de Venta
d) Financiación de la operación a tasa de interés de mercado, por el plazo “n”, en condiciones de libre de riesgo

De esta manera:

PATRIMONIO INICIAL - momento “0”	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = S(0)	Opciones Lanzadas = POC(0,n;K)
Opción de Venta = POV(0,n;K)	Financiamiento = S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)
	PN(0) = 0

Al vencimiento de la opción, se tiene:

1) Valor Alcanzado por el Bien Subyacente – “S(n)” –
2) Valor Final de la Opción de Venta
3) Valor final de la opción de compra, según la cotización al contado del bien subyacentes
4) Monto alcanzado por el financiamiento

Luego,

PATRIMONIO FINAL - momento “n”	
Activo	**Pasivo**
Inversiones = S(n)	Opciones Lanzadas = VFOC[0,n;K]
Opción de Venta = VFOV(0,n;K)	Financiamiento = [S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)]* [1+i(o,n)]-
	PN(0) = S(n)+VFOV(0,n;K)-VFOC[0,n;K]- [S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)] . [1+i(o,n)]

Así, habiendo partido de un patrimonio neto inicial de “0”, al vencimiento se tiene un valor de patrimonio neto que puede ser:

A. Si S(n) = K: VFOC[0,n;K] = VFOV(0,n;K) = 0,
   - PN(n) = K - [S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)] . [1+i(o,n)]

B. Si S(n) < K: VFOC(0,n;K) = 0 VFOV(0,n;K) = K – S(n),
   - PN(n) = K - [S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)] . [1+i(o,n)]

C. Si S(n) > K: VFOC[0,n;K] = S(n) – K, VFOV(0,n;K) = 0
   - PN(n) = K - [S(0) + POV(0,n;K) - POC(0,n;K)] . [1+i(o,n)]

Ahora en los tres casos posibles se obtiene el mismo Patrimonio Neto final – "PN(n)" –

Dicho valor no puede ser ni positivo ni negativo, puesto que esto implicaría posibilidad de tomar posiciones en el mercado (lanzadora de opciones de compra como este caso o la opuesta como tomadora de opciones de compra) permitiendo ganancias libres de riesgo.

Adicionalmente si se tiene patrimonio neto tanto inicial como final "0", la correspondencia con cada rubro del balance implica que:

S(0) + POV(0,n;K) = POC(0,n;K) + Financiamiento

S(n) + VFOV(0,n;K) = VFOC(0,n;K) +K

De donde el Financiamiento = K/ [1+i(o,n)]

Por lo tanto, se tiene:

S(0) + POV(0,n;K) = POC(0,n;K) + K/ [1+i(o,n)]

Lo que se conoce como relación de paridad ("Put-Call Parity"), que vincula a todos los elementos del contrato y del mercado, en condiciones de equilibrio (o de "no arbitraje" libre de riesgo).

Debe tenerse en cuenta que necesariamente:

POC(0,n;K) > 0

POV(0,n;K) > 0

En particular, se tiene que:

- POC(0,n;K) = POV(0,n;K) + S(0) – K / [1+i(o,n)]
- POC(0,n;K) > S(0) – K / [1+i(o,n)]
- POV(0,n;K) = POC(0,n;K) + K / [1+i(o,n)] – S(0)
- POV(0,n;K) > K / [1+i(o,n)] – S(0)

En el caso en que la relación entre cotización al contado ("S(0)") y a término ("F(0,n)") responda a: F(0,n) = S(0) . [1+i(o,n)], se tiene:

- POC(0,n;K) = POV(0,n;K) + [F(0,n)-K] / [1+i(o,n)]
- POV(0,n;K) = POC(0,n;K) - [F(0,n)-K] / [1+i(o,n)]

Todo esto lo podemos ver continuando con el ejemplo anterior

PATRIMONIO INICIAL - momento "0" - en $			
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	100,00	Opciones Lanzadas	7,00
Opcion de Venta	2,00	Financiamiento	95,00
		PN(0)=	**0,00**

Cuadro de Valores Finales en $				
S(n)	VFOV[0,n,K]	VFOC[0,n,K]	Financiamiento	PN(n)
80,00	24,50	0,00	104,50	0,00
90,00	14,50	0,00	104,50	0,00
100,00	4,50	0,00	104,50	0,00
104,50	0,00	0,00	104,50	0,00
110,00	0,00	5,50	104,50	0,00
120,00	0,00	15,50	104,50	0,00
130,00	0,00	25,50	104,50	0,00
140,00	0,00	35,50	104,50	0,00

PATRIMONIO FINAL - momento “n” - en $			
	S(n) =	80,00	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	80,00	Opciones Lanzadas	0,00
Opcion de Venta	24,50	Financiamiento	104,50
		PN(0)=	**0,00**

PATRIMONIO FINAL - momento “n” - en $			
	S(n) =	140,00	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	140,00	Opciones Lanzadas	35,50
Opcion de Venta	0,00	Financiamiento	104,50
		PN(0)=	**0,00**

Hemos arribado así a un esquema operativo donde una entidad financiera (en este caso actuando como lanzador de una opción de compra), puede tomar una posición libre de riesgo de mercado respecto del bien subyacente, y obtener beneficios de intermediación financiera sobre la base de las habituales brechas comprador-vendedor entre los instrumentos utilizados.

Este esquema corresponde al denominado “arbitraje estático” e implica que desde el inicio se tiene una posición armada (con los elementos del patrimonio inicial) y no se realizan operaciones hasta el vencimiento de la opción, y el resultado es nulo, salvo por el efecto de las brechas (“spread”) que correspondan a las operaciones iniciales o en su caso de liquidación de dichas operaciones.

Este arbitraje estático es eficaz para mantener una posición libre de riesgo de mercado, pero en general no es eficiente porque requiere de numerosas transacciones. En lo que hace al bien subyacente, se puede alternativamente operar a término (o “futuros”), reduciendo sustancialmente el financiamiento, pero necesariamente requiere de una operación de opción de venta con iguales parámetros que la de compra, lo que en la práctica no resulta ser operativamente eficiente.

6. Caracterización de los Modelos

Como puede verse en las situaciones anteriores, considerando una opción de compra lanzada, la posición descubierta (sin compra del bien subyacente), puede generar resultados negativos con la “suba” de la cotización del bien, mientras que la posición cubierta (con compra del bien subyacente) puede generar resultados negativos con la "baja" de la cotización del bien. El arbitraje estático requiere complementar a la posición cubierta con la toma de una opción de venta.

Se tiene así, como pregunta si es posible tener una posición intermedia en bienes (comprando una fracción "Q_b" del bien subyacente) y obviando la toma de una opción de venta.

De esta forma el planteo conceptual e introductorio de los modelos de valuación de opciones, se basa en el objetivo de determinar qué cantidad de bienes subyacentes es necesario adquirir para lograr una estructura de arbitraje, tal que tanto el patrimonio neto inicial como final sean iguales a cero.

Partiendo de los elementos contractuales y de mercado, se parte de la ecuación de paridad y se introduce, no solo la fracción de bien - "Q_b" - sino también la fracción de financiamiento - "Q_f" - (porque al reducir la cantidad de bienes a comprar se requiere menor financiamiento.

Tomando como base la opción de compra, se obtiene alternativamente las relaciones para la opción de venta:

$POC(0,n;K) = S(0) + POV(0,n;K) – K / [1+i(o,n)]$

$POC(0,n;K) = Q_b . S(0) - Q_f. K / [1+i(o,n)]$

$POV(0,n;K) = POC(0,n;K) + K / [1+i(o,n)] – S(0)$

$POV(0,n;K) = (1-Q_f) . K / [1+i(o,n)] – (1-Q_b) . S(0)$

Para la determinación de las fracciones "Q_b" y "Q_f", se requiere hipótesis (básicamente sobre evolución del precio del bien subyacente y en su caso sobre la evolución de la tasa de interés) y de ahí las características de cada modelo.

Es importante tener presente, que los "precios" de cada elemento de los mercados los fija la oferta y demanda, y eso también es válido para las "primas", donde las condiciones de equilibrio de los mercados se reflejan en las relaciones de paridad.

Presentamos a continuación un modelo simple, denominado "dicotómico", que permite ejemplificar el planteo conceptual señalado.

7. El Modelo Dicotómico

El denominado "Modelo Dicotómico", cuenta con las características siguientes

a) Se considera el plazo de la operación como una unidad sin subdivisiones, siendo la tasa de interés para el plazo de la operación: $i(0,n) = i$

b) El precio al contado del bien subyacente entre inicio y fin del contrato sólo puede tener dos movimientos de precio posibles, conforme:

   – "u": factor de incremento de precio del bien

   – "d": factor de reducción del precio del bien

Como condición de mercado: $u > 1+i > d$

Dado el valor $S(0)=S$, el precio final puede tomar los valores $S(n) = u.S$ ó $S(n) = d.S$

c) Al lanzamiento de una opción de compra percibiendo la prima se procede a constituir una cartera de arbitraje, adquiriendo "Q_b" unidades del bien subyacente utilizando financiamiento adicional. Así se tiene como posición inicial:

POC(0,n;K) = Q_b . S - Q_f . K/(1+i)

d) Al vencimiento del contrato de opción de compra se pueden presentar sólo dos valores finales posibles del contrato (ahora simplificamos la notación en cuanto al valor final, según cada situación)

- Posición final ante el alza del precio del bien

$C_u = Q_b . S.u - Q_f . K$

- Posición inicial ante la baja del precio del bien

$C_d = Q_b . S. d - Q_f . K$

Estas dos ecuaciones conforman un sistema con dos incógnitas: Q_b, Q_f de donde se despeja:

$Q_b = (C_u - C_d) / [S(.u - d)]$

$Q_f = (Q_b . S . u - C_u)/ K$

Entonces, volviendo a la expresión de la prima según "Q_b" y "Q_f", y sustituyendo por los resultados anteriores tenemos:

$$POC(0,n;K) = \frac{C_u - C_d}{u-d} - \left[\frac{C_u - C_d}{u-d}.u - C_u\right]/(1+i)$$

De donde también:

$$POC(0,n;K) = \frac{1}{1+i}\left[\frac{C_u.[(1+i)-d]}{u-d} + \frac{C_d.[u-(1+i)]}{u-d}\right]$$

Y si introducimos: $p = \frac{(1+i)-d}{u-d}$ $\quad 1-p = \frac{u-(1+i)}{u-d}$

Entonces,

$$POC(0,n;K) = \frac{1}{1+i}\,.[p.C_u + (1-p).C_d]$$

e) En las aplicaciones se asume que: u = 1/d, por lo cual, dadas las cotizaciones de los mercados: S(0), i(0,n) y POC(0,n;K), se tiene una ecuación con una única incógnita "u", y a partir de ello se obtienen los valores de "Q_b" y "Q_f",

Así continuando con el ejemplo, se tiene:

Modelo Dicotómico		
Elementos Contractuales		
K =	$	104,50
n =		1
Elementos del Mercado		
S(0) =	$	100,00
i(0,n) =		10%
Primas al Origen		
POC(0,n;K) =	$	7,00
POV(0,n;K) =	$	2,00

Aplicación:	
u:	1,1340
d:	0,8818
(1+i)	1,1000
p	0,8652
1-p	0,1348
Cu	8,9000
Cd	0,0000
Qb	35,29%
Qf	29,78%
POC(0;n;K)	7,00
diferencia con mercado	0,00
POV(0;n;K)	2,00
diferencia con mercado	0,00

Las inversiones son realizadas por una fracción de bienes, el financiamiento se obtiene por diferencia o por fórmula:

PATRIMONIO INICIAL - momento "0" - en $			
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	35,29	Opciones Lanzadas	7,00
		Financiamiento	28,29
		PN(0)=	**0,00**

Al vencimiento, conforme con las variables implícitas determinadas por el modelo se calculan dos valores posibles de patrimonio final.

PATRIMONIO FINAL s/ modelo - momento "n" - en $			
	S(n) = u. S	113,40	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	40,02	Opciones Lanzadas	8,90
		Financiamiento	31,12
		PN(0)=	**0,00**

PATRIMONIO FINAL s/ modelo - momento "n" - en $			
	S(n) = d. S	88,18	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	31,12	Opciones Lanzadas	0,00
		Financiamiento	31,12
		PN(0)=	**0,00**

En la práctica si el Patrimonio Final resulta de los valores de mercado, y de mantener inalterada la posición durante todo el plazo, surgen pérdidas y ganancias, que se pueden comparar con los dos esquemas iniciales, tales como:

Cuadro de Valores Finales en $ - Modelo Dicotomico					Pos. "Abierta"	Pos. "Cubierta"
S(n)	Qb. S(n)	VFOC[0,n,K]	Financiamiento	PN(n)	PN(n)	PN(n)
80,00	28,24	0,00	31,12	-2,89	7,70	-22,30
90,00	31,77	0,00	31,12	0,64	7,70	-12,30
100,00	35,29	0,00	31,12	4,17	7,70	-2,30
104,50	36,88	0,00	31,12	5,76	7,70	2,20
110,00	38,82	5,50	31,12	2,20	2,20	2,20
120,00	42,35	15,50	31,12	-4,27	-7,80	2,20
130,00	45,88	25,50	31,12	-10,74	-17,80	2,20
140,00	49,41	35,50	31,12	-17,21	-27,80	2,20

PATRIMONIO FINAL - momento "n" - en $			
	S(n) =	80,00	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	28,24	Opciones Lanzadas	0,00
		Financiamiento	31,12
		PN(0)=	**-2,89**

PATRIMONIO FINAL s/ modelo - momento "n" - en $			
	S(n) =	140,00	
Activo		**Pasivo**	
Inversiones	49,41	Opciones Lanzadas	35,50
		Financiamiento	31,12
		PN(0)=	**-17,21**

8. Conceptos finales

Hemos presentado desde una perspectiva "contable", el concepto de posición y los principios introductorios de los modelos de valuación de opciones, centrándonos en el concepto de "arbitraje".

En primer lugar, consideramos arbitraje sobre la base de la ecuación de paridad denominado "arbitraje estático"

En segundo lugar, al ingresar al modelo dicotómico, en su formulación básica resulta un arbitraje estático, pero constituye la base conceptual de modelos más avanzados de "arbitraje dinámico", que en términos discretos responden básicamente al modelo dicotómico y en términos continuos a planteos más complejos, cuya versión más conocida es la de Black y Scholes.

El concepto de arbitraje dinámico en su concepción teórica responde a la constitución de una cartera inicial que acompañe la evolución de la cotización de opción, tal que, la composición de la cartera, se modifica a través del tiempo, con resultados periódicos nulos y recalculando la fracción de bienes al inicio de cada período, tal que al vencimiento se cuente con la cantidad necesaria de bienes para atender el contrato de opción, sin haber tenido ganancias ni pérdidas.

Así este trabajo arriba justamente a la cantidad de bienes (fracción "Q_b" y su equivalente en opciones de venta) con que se inicia un proceso de arbitraje, y dejamos planteado el nexo con la práctica, donde una entidad financiera toma y lanza opciones sobre un mismo bien subyacente (en principio), tanto de compra como de venta, para distintos plazos (y fechas de vencimiento) y precios de ejercicio – y aún distintas modalidades -; y donde justamente esa fracción es la base para gestionar una cartera heterogénea, adquiriendo o vendiendo bienes (con el respectivo financiamiento o generación de fondos) por la suma algebraica de las fracciones de cada contrato de opción operado (en la jerga "posición delta") y en relación con sus posiciones al contado y a futuro.

9. Bibliografía

Cox, John C., Rubinstein, Mark (1985). "Option Markets", Prentice Hall, ISBN 0-13-6382085-3.

Hull, John (2018). "Fundamentals of Futures and Options Markets", Novena edición, Pearson, 2018. SBN-13: 978-0134083247, ISBN-10: 9780134083247.

Melinsky, E. (1994), Mercado de Valores de Buenos Aires S.A. Cuadernos de Investigación del Instituto Argentino de Mercado de Capitales nº 4 y 5: "Opciones sobre Acciones en los Mercados de Valores: Conceptos, Modelos de Valuación y Estrategias". Buenos Aires.

Sharpe, W., Alexander, G., Bailey, J. (1998). "Investments" Prentice Hall, 6ta edición, ISBN-10: 0130101303, ISBN-13: 9780130101303.